Maradékos polinomosztás útikalauz VIK-eseknek

Balda Péter

2010. október 31.

1. Előszó

Mivel annak ellenére, hogy Ky mester harmadjára rángatott táblához, és ott megpróbáltam maradékos polinomosztást magyarázni, többen azt jeleztétek felém, hogy nem értitek. Ezt meg tudom érteni, a mikrofonnal, illetve a táblával való bohóckodás valószínűleg elvonta a lényegről a figyelmet, illetve megnehezítette az óra követését. Viszont nagyon fontosnak tartom, hogy ezt a részt megértsétek, mert a maradékos polinomosztás fontos része lesz bizonyos integrálok kiszámolásának, ahogyan azt az utolsó órán láthattuk is.

Jelen dokumentum kinyomtatása, másolása, sokszorosítása, reprodukálása, bármilyen adatrögzítő rendszerben való tárolása, vagy utánközlése a szerző megkérdezése és kifejezett írásbeli engedélye nélkül, bármikor bárki számára megengedett.

2. A lényeg

Adott tehát két polinom, $P(x)$ és $Q(x)$. Feltesszük, hogy $P(x)$ fokszáma nagyobb, mint $Q(x)$ fokszáma (ellenkező esetben nem kezdenénk el a polinomosztást, hanem elkezdenénk kiintegrálni a törtet, de erről majd később lesz még szó). Az általános recept az az, hogy megnézzük, hogy $P(x)$ legnagyobb fokszámú tagjá*ban* hányszor van meg $Q(x)$ legnagyobb fokszámú tag*ja*. A kapott eredménnyel visszaszorozzuk $Q(x)$-et, és ezt kivonjuk az eredeti $P(x)$ polinomból. Az osztást ezután az itt kapott polinommal újra elvégezzük. Könnyen megfigyelhető, hogy $P(x)$ fokszáma szépen elkezd csökkenni. Ezt az algoritmust pedig éppen addig kell ismételni, amíg $P(x)$ fokszáma kisebb lesz, mint $Q(x)$-é.

2.1. Átalánosan

Ha lehet, egy kicsit még általánosabb leírás következik. Akinek itt nem világos, nem kell megijedni, remélhetőleg a 2.2-es részben tisztázódik minden. Legyen tehát $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, valamint $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, ahol feltettük, hogy $n > m$. Az algoritmus lépései:

1. Megnézzük, hogy $P(x)$ legnagyobb fokszámú tagjá*ban* hányszor van meg $Q(x)$ legnagyobb fokszámú tag*ja*, azaz: $\frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \frac{a_n}{b_n} x^{n-m}$
2. Visszaszorozzuk $Q(x)$-et a kapott kifejezéssel ($\frac{a_n}{b_n} x^{n-m}$), és $P(x)$ alá írjuk a kapott polinomot, amit aztán ki is vonuk $P(x)$-ből. Ekkor $P(x)$ fokszáma (valamennyivel, de) csökkeni fog.
3. A kivonás után kapott polinommal ismét elvégezzük ugyanígy az osztást, egészen addig, amíg $P(x)$ fokszáma kisebb nem lesz, mint $Q(x)$ fokszáma.

2.2. Valami normális példát esetleg?

Azt is mutatok. Legyen $P(x) = x^5 - 2x2 + 4$, és $Q(x) = x^2 + 2x + 1$.

Az osztás valahogy így fog kinézni:

$x^5 - 2x^2 + 4 : (x^2 + 2x + 1) = x^3 - 2x^2 + 3x - 6$

$\underline{(x^5 + 2x^4 + x^3)}$

$-2x^4 - x^3 - 2x^2 + 4$

$\underline{(-2x^4 - 4x^3 - 2x^2)}$

$3x^3 + 4$

$\underline{(3x^3 + 6x^2 + 3x)}$

$-6x^2 - 3x + 4$

$\underline{(-6x^2 - 12x - 6)}$

$\mathbf{9x + 10}$

Nem kell megijedni így első ránézésre, leírom hogy mi történik az első két sorig, mert onnantól úgyis ismétlődik.

1. Használom a fentebb már leírt szabályt: $\frac{x^5}{x^2} = x^3$.
   $x^5 - 2x^2 + 4 : (x^2 + 2x + 1) = \mathbf{x^3}$
2. Visszaszorzok $x^2 + 2x + 1$-el, ez a rész zárójelben, és aláhúzva szerepel:
   $x^5 - 2x^2 + 4 : (x^2 + 2x + 1) = x^3$
   $\underline{(\mathbf{x^5} + \mathbf{2x^4} + \mathbf{x^3})}$
3. Kivonom a kapott eredményt az eredeti $P(x)$ polinomból:
   $x^5 - 2x^2 + 4 : (x^2 + 2x + 1) = x^3$
   $\underline{(x^5 + 2x^4 + x^3)}$
   $\mathbf{-2x^4 - x^3 - 2x^2 + 4}$
4. És amit itt kapok, ezzel osztok tovább. Tehát a következő rész: hányszor van meg $-2x^4$-ben x^2? Hát bizony $-2x^2$-szer.
   $x^5 - 2x^2 + 4 : (x^2 + 2x + 1) = x^3 - \mathbf{2x^2}$
   $\underline{(x^5 + 2x^4 + x^3)}$
   $-2x^4 - x^3 - 2x^2 + 4$
5. Ezután $-2x^2$-el szorzunk vissza, és azt vonjuk ki az utoljára kapott polinomból. Innen már talán tényeg látszik, hogy mi az algoritmus.

Az osztás végeredménye tehát $x^3 - 2x^2 + 3x - 6$, maradék a $9x + 10$. Ezzel már nem osztunk tovább, mert kisebb a fokszáma, mint amivel osztani szeretnénk.

Házi feladat: ellenőrizd, hogy jól számoltam-e, azaz számold ki, hogy mit ad $(x^2 + 2x + 1)(x^3 - 2x^2 + 3x - 6) + 9x + 10$ eredményül. Ha minden jól megy, visszakapod az eredeti $P(x)$ polinomot.

3. De mire jó ez az egész?

Nagyon sok helyen, de nálunk most legfőképpen integrálszámításnál fog jól jönni a maradékos polinomosztás. Ugyanis ha egy $\frac{P(x)}{Q(x)}$ alakú törtet szeretnénk integrálni, és netán $P(x)$ fokszáma nagyobb, mint a $Q(x)$-é, az lesz az első dolgunk, hogy leosztjuk. Aztán ami marad, egyenként ki tudjuk integrálni. Vegyük a következő integrált:

$$\int \frac{x^6 - 2x^5 + x^3 - 38x^2 + 9x + 55}{x^2 - x - 6}\,\mathrm{d}x$$

A polinomosztás eredménye $x^4 - x^3 + 5x^2 - 8$, maradék az $x + 7$. Ezáltal az integrál átalakítható az alábbi alakba:

$$\int \frac{x^6 - 2x^5 + x^3 - 38x^2 + 9x + 55}{x^2 - x - 6}\,\mathrm{d}x = \int (x^4 - x^3 + 5x^2 - 8 + \frac{x+7}{x^2 - x - 6})\,\mathrm{d}x = \int (x^4 - x^3 + 5x^2 - 8 + \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3})\,\mathrm{d}x$$

Az utolsó átalakításnál elkezdtem a maradék tört parciális törtekre való bontását. Ezt úgy kell kezdeni, hogy a nevezőt szorzattá alakítod, és két összegre bontod. Gyakorlatilag a közös nevezőre hozás fordítottja zajlik le ilyenkor. A és B viszont még kérdéses. Ha most akarnánk közös nevezőre hozni, nem nehéz megérteni, miért kell megoldani az alábbi egyenletet:

$A(x - 3) + B(x + 2) = x + 7$
$Ax - 3A + Bx + 2B = x + 7$
$(A + B)x - 3A + 2B = x + 7$

Az utolsó sorról leolvasható az alábbi egyenletrendszer, mivel mindkét oldalon azonos mennyiségű x, illetve konstans szerepel:

$A + B = 1$
$-3A + 2B = 7$

Megoldásai: $A = -1$ és $B = 2$. Ezeket visszahelyettesítve az integrál könnyen kiszámolható:

$$\int (x^4 - x^3 + 5x^2 - 8 - \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-3})\,\mathrm{d}x = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} - 8x - \ln|x+2| + 2\ln|x-3| + C.$$