

**1. feladat (6+8=14 pont)**

Legyen  $g$  kétszer folytonosan differenciálható egyváltozós függvény és  $u(x, y) = g(x^2y)$ .

- Határozza meg  $u$  másodrendű parciális deriváltjait (tetszőleges  $g$  esetén)!
- Írja fel az  $u$  függvény grafikonját a  $P(1, 2)$  pontban érintő sík egyenletét  $g(t) = e^t$  esetén!

**2. feladat (6 pont)**

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + 3y^4}, \quad \mathbf{v} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

A definíció alapján határozza meg az  $f$  függvénynek a  $\mathbf{v}$  egységvektor irányába vett iránymenti deriváltját az origóban!

**3. feladat (10 pont)**

Határozza meg az

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

függvény nyeregpontjait, lokális szélsőérték-helyeit és a szélsőértékek típusát!

**4. feladat (5+5=10 pont)**

Legyen a  $T$  tartomány az  $y = x^2$  és az  $y = 2x$  görbék közti korlátos síkidom.

- Ábrázolja a  $T$  tartományt és írja fel az  $I = \iint_T f(x, y) dT$  kettős integrált kétféleképpen kétszeres (iterált) integrálként!
- Számolja ki  $I$  értékét  $f(x, y) = x^2 + y$  esetén!

**5. feladat (10 pont)**

Egy 2 egység sugarú tömör gömböt pontosan a középpontján keresztül átfúrunk egy 1 egység sugarú fúróval. Mennyivel csökkent ezáltal a tömör gömb térfogata?