**ANALÍZIS(2)**
Műszaki Informatika szak

**ALÁÍRÁSÉRT**

**2003. június. 5.**
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

*DE* **1. feladat (10 pont)**

Határozza meg az

$$y' = \frac{(y^3 - 1)\, x\, e^{2x}}{y^2}$$

differenciálegyenlet általános megoldását!

$y \neq 0$ ; $y \equiv 1$ megoldás

Ha $y \neq 1$ (és $y > 0$ vagy $y < 0$):

$$\int \frac{y^2}{y^3-1}\, dy = \int x e^{2x}\, dx$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{3y^2}{y^3-1}\, dy = \frac{1}{3} \ln|y^3-1|$$

$$\int x e^{2x}\, dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\, dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}$$

$u = x \quad v' = e^{2x}$
$u' = 1 \quad v = \frac{1}{2} e^{2x}$

A de. megoldása: $\frac{1}{3} \ln|y^3-1| = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$

ill. $y \equiv 1$

*DE* **2. feladat (13 pont)**

Határozza meg az

$$y' + y\, \sin x = \sin x\; e^{2\cos x}$$

differenciálegyenlet általános megoldását!

H: $y' + y \sin x = 0$ (1)

$y' = -y \sin x \qquad y \equiv 0$ m.o.

$\int \frac{dy}{y} = \int -\sin x\, dx$ (1) $\Rightarrow \ln|y| = \cos x + C_1$ (1)

$\Rightarrow |y| = e^{C_1} e^{\cos x}$

$$\left.\begin{array}{l} y = \pm e^{C_1} e^{\cos x} \\ y \equiv 0 \end{array}\right\} y_H = C\, e^{\cos x} \;;\; C \in \mathbb{R}$$ (2)

$y_{ip} = C(x)\, e^{\cos x}$ (1)

$y_{ip}' = C' e^{\cos x} + C(-\sin x) e^{\cos x}$ (1)

$C' e^{\cos x} - C \sin x\, e^{\cos x} + C e^{\cos x} \sin x = \sin x\, e^{2\cos x}$ (1)

$\Rightarrow \quad C' = \sin x\, e^{\cos x} \quad \Rightarrow \quad C = -\int \underbrace{-\sin x\, e^{\cos x}}_{f' e^{f}} dx \overset{(1)}{=} -e^{\cos x}$ (1)

$y_{ip} = -e^{\cos x}\, e^{\cos x} = -e^{2\cos x}$ (1)

$y_{iá} = y_H + y_{ip} \overset{(2)}{=} C e^{\cos x} - e^{2\cos x} \quad ; \quad C \in \mathbb{R}$

**3. feladat (10 pont)**

Határozza meg az alábbi sorok konvergencia sugarait!

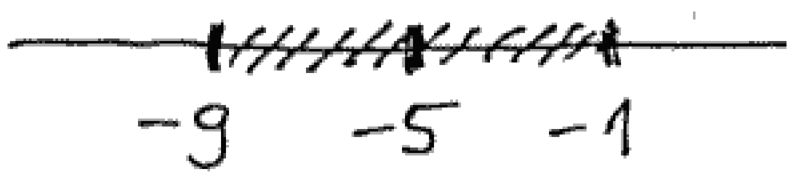
a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k!)^2}{(2k)!} (x+5)^k$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k!)^2}{(2k)!} (x+5)^{3k}$

Adjon meg egy olyan intervallumot, amelyen az a)-beli sor egyenletesen konvergens!

$x_0 = -5 \quad ; \quad a_k = (-1)^k \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

$\frac{1}{R_1} = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \overset{(1)}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{((k+1)!)^2 (2k)!}{(2k+2)!\,(k!)^2} \overset{(1)}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{2(k+1)(2k+1)} \overset{(1)}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{1+\frac{1}{k}}{2(2+\frac{1}{k})} \overset{(1)}{=}$

$= \frac{1}{4} \Rightarrow R_1 = 4$ (1)




(1)

$[\alpha, \beta] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ - en egyenletes a konvergencia.

Pl. $[-5, -4]$ (2)

b.) $u := (x+5)^3$ helyettesítéssel visszavezetjük a)-ra

$|u| < 4 \; : \quad |x+5|^3 < 4 \quad \Rightarrow |x+5| < \sqrt[3]{4}$

$\Rightarrow R_2 = \sqrt[3]{4}$ (2)

$\int\!\Sigma$ **4. feladat (10 pont)**

Igaz-e, hogy

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2\, 3^n}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{\cos nx}{n^2\, 3^n}\, dx$$

$f_n \in C^0_{[0,1]}$

$$|f_n(x)| = \frac{|\cos nx|}{n^2 3^n} \le \frac{1}{n^2 3^n}$$

$\sum^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} = \sum b_n$ konvergens, mert .

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2 \cdot 3} = \frac{1}{3} < 1$$

(vagy hányadoskritériummal is lehet)

$\Rightarrow \sum_1^{\infty} f_n(x)$ egyenletesen konv. $[0,1]$-en.

Weierstrass kr.

A tagonkénti integrálhatóságra vonatkozó feltétel minden feltétele teljesül $\Rightarrow$ igaz az állítás.

$\int\!\Sigma$ **5. feladat (10 pont)**

Legyen

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad g(x) = x^3 \sin 2x$$

Írja fel az $f$ függvény $x_0 = 5$ körüli Taylor sorát és a $g$ függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát!

Adja meg ezeknek a soroknak a konvergencia tartományait!

$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{(x-5)+5} = \frac{1}{5}\,\frac{1}{1-\frac{-(x-5)}{5}} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-5}{5}\right)^n =$$

$x_0 = 5$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n+1}} (x-5)^n = \frac{1}{5} - \frac{1}{5^2}(x-5) + \frac{1}{5^3}(x-5)^2 + \dots$$

$$KT: \left|-\frac{x-5}{5}\right| = \frac{|x-5|}{5} < 1 \Rightarrow |x-5| < 5 \quad (x \in (0,10))$$

$$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots \qquad u \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \sin 2x = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \dots \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^4 - \frac{2^3}{3!} x^6 + \frac{2^5}{5!} x^8 - \dots \qquad x \in \mathbb{R}$$

*Ts* **6. feladat (15 pont)**

Írja fel az

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \quad \text{és a} \quad g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+5x^2}}$$

függvények $x_0=0$ körüli Taylor sorait és határozza meg azok konvergencia sugarait!

$g^{(6)}(0)=?$ (Elemi műveletekkel adja meg!)

A fenti Taylor sor segítségével határozza meg az alábbi határértéket

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+5x^2}}-1}{x^2}$$

$$f(x)=(1+x)^{-1/3}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/3}{n}x^n \quad 2 \qquad R_1=1 \quad 1$$

$$g(x)=(1+5x^2)^{-1/3}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/3}{n}(5x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/3}{n}5^n x^{2n} \quad 2$$

$$|5x^2|<1 \Rightarrow |x|<\frac{1}{\sqrt5} \qquad R_2=\frac{1}{\sqrt5} \quad 1$$

$$\frac{g^{(6)}(0)}{6!}=a_6 \quad 1 \quad \Rightarrow \quad g^{(6)}(0)=6!\binom{-1/3}{3}5^3 \quad 1 \quad =6!\,\frac{(-\frac13)(-\frac43)(-\frac73)}{1\cdot2\cdot3}\cdot5^3 \quad 2$$

$$g(x)=1+\binom{-1/3}{1}5x^2+\binom{-1/3}{2}5^2x^4+\dots$$

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\binom{-1/3}{1}5+\binom{-1/3}{2}5^2x^2+\dots=\frac{-\frac13}{1}\cdot5=-\frac53$$

*ƒD* **7. feladat (14 pont)**

$$f(x,y,z)=\frac{x}{y}+\ln(z^2+x)\,, \qquad P(0,1,-1)\,, \qquad \underline{v}=(1,-1,-2)$$

a) Írja fel az $f$ függvény $P$-beli gradiensét, amennyiben az létezik!

b) Adja meg a $P$ pontbeli, $\underline{v}$-vel párhuzamos irányú iránymenti deriváltat!

c) Mennyi a maximális iránymenti derivált a $P$ pontban?

a.) $f_x' = \frac{1}{y} + \frac{1}{z^2+x}$ (1)

$f_y' = -\frac{x}{y^2}$ (1)

$f_z' = \frac{2z}{z^2+x}$ (1)

$K_P$-ben léteznek és folytonosak $\Rightarrow \operatorname{grad} f(P) \ \exists$ (2)

$\operatorname{grad} f(P) = f_x'(P)\underline{i} + f_y'(P)\underline{j} + f_z'(P)\underline{k} \underset{(1)}{=} 2\underline{i} + 0\underline{j} - 2\underline{k}$ (2)

b.) $\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_P = \operatorname{grad} f(P) \cdot \underline{e}$ $\qquad |\underline{v}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$ : $\underline{e} = \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{j} - \frac{2}{\sqrt{6}}\underline{k}$

$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_P = (2\underline{i} + 0\underline{j} - 2\underline{k})\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\underline{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{j} - \frac{2}{\sqrt{6}}\underline{k}\right) = \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

c.) $\max \left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_P = |\operatorname{grad} f(P)| = \sqrt{4+0+4} = \sqrt{8}$

**$n$D 8. feladat (10 pont)**

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0) = 1$$

a) Folytonos-e az $f$ az origóban?

b) Totálisan differenciálható-e az $f$ az origóban?

a.) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}_{\to 1} \underbrace{\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{=\sqrt{x^2+y^2} \to 0} = 0 \neq f(0,0) = 1$

Tehát $f$ nem folytonos $(0,0)$-ban.

b.) Nem tot. deriválható $(0,0)$-ban, mert nem folytonos $f$ a $(0,0)$ pontban. (A szükséges feltétel nem teljesül.)

**$n$D 9. feladat (8 pont)**

$f(t)$ kétszer folytonosan differenciálható függvény, $t = \sqrt{x^2+3y^2}$.

$$g(x,y) = f(\sqrt{x^2+3y^2}), \qquad g_y'(x,y) = ?, \qquad g_{yx}'' = ?$$

$g_y' = f'(\sqrt{x^2+3y^2}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+3y^2}} \cdot 6y$

$g_{yx}'' = 3y \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(f'(\sqrt{x^2+3y^2}) \frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}\right) =$

$= 3y \left(f''(\sqrt{x^2+3y^2}) \frac{1}{2\sqrt{x^2+3y^2}} \cdot 2x \frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}} + f'(\sqrt{x^2+3y^2}) \left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+3y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x\right)$