ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak

II. ZÁRTHELYI

2012. ápr. 12.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (15 pont)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-4/(x+2)^2}, & \text{ha } x \le 0 \\ \dfrac{\sin(\pi x)}{5x}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

a) Hol és milyen típusú szakadása van az f függvénynek?
b) Írja fel a deriváltfüggvényt a szakadási helyek kivételével!

a) É.T. : $x \neq -2$

$\boxed{7}$ Vizsgálandó pontok: $-2, 0$

$\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} e^{-2/(x+2)^2 \to -\infty} = 0$: megszüntethető szakadás

(A kitevő $\frac{-2}{+0}$ alakú.) (3)

$f(0-0) = \lim\limits_{x \to 0-0} e^{-4/(x+2)^2} = f(0) = e^{-1} = \frac{1}{e}$ (1)

$f(0+0) = \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\sin \pi x}{5x} = \lim\limits_{x \to 0+0} \frac{\sin \pi x}{\pi x} \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} \neq \frac{1}{e}$

$x = 0$ - ban véges ugrás van (3)

b)

$\boxed{8}$

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{4}{(x+2)^2}} \cdot (-4)(-2)(x+2)^{-3}, & \text{ha } x<0 \text{ és } x \neq -2 \\ \dfrac{\pi(\cos \pi x)5x - (\sin \pi x) \cdot 5}{25x^2}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

(4+4)

2. feladat (10 pont)

a) Írja fel a differenciálhányados definícióját az értelmezési tartomány belső x_0 pontjában!
b) A derivált definíciójával határozza meg az

$$f(x) = \sqrt{6 + 2x}$$

függvény deriváltját az $x_0 = 5$ pontban!

anal2 120412/1.

a.) $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ 2

b.) $f'(5) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{6+2(5+h)} - \sqrt{6+10}}{h} =$ 3

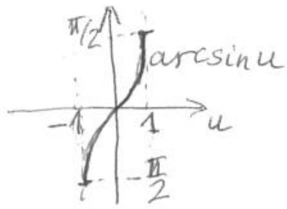
$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{16+2h} - 4}{h} \, \dfrac{\sqrt{16+2h} + 4}{\sqrt{16+2h} + 4} =$ 2

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cancel{h}}{\cancel{h}} \, \dfrac{2}{\sqrt{16+2h} + 4} = \dfrac{2}{4+4} = \dfrac{1}{4}$ 3

3. feladat (18 pont)

$$f(x) = 3 \arcsin(4x-1) - \pi$$

a) $D_f = ?\,, \quad R_f = ?\,, \quad f'(x) = ?\,, \quad D_{f'} = ?$
b) Indokolja meg, hogy f-nek létezik az f^{-1} inverze!
$f^{-1}(x) = ?\,, \qquad D_{f^{-1}} = ?$



a.) $-1 \le 4x - 1 \le 1$

$\boxed{10}$ $0 \le 4x \le 2 \implies x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] = D_f$ 3

$3 \arcsin(4x-1) \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

$\implies R_f = \left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 2

$f'(x) = 3 \dfrac{1}{\sqrt{1-(4x-1)^2}} \cdot 4$ 4 $\quad D_{f'} = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 1

b.) $f'(x) > 0$ $\left(0, \frac{1}{2}\right)$-en és f folytonos $\left[0, \frac{1}{2}\right]$-en

$\boxed{8}$ $\implies f$ szig. mon. nő D_f-en $\implies \exists$ inverze D_f-en. 2

$y = 3 \arcsin(4x-1) - \pi \implies \dfrac{y+\pi}{3} = \arcsin(4x-1)$

$\implies 4x - 1 = \sin \dfrac{y+\pi}{3} \implies x = \dfrac{1}{4}\left(\sin \dfrac{y+\pi}{3} + 1\right)$

$x \Longleftrightarrow y$: $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{4}\left(\sin \dfrac{x+\pi}{3} + 1\right)$ 4

$D_{f^{-1}} = R_f = \left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 2

an1z2 120412/2.

4. feladat (12 pont)

$$f(x) = \left(2 + x^2\right)^{3x}$$

a) $f'(x) = ?$
b) Írja fel az $x = 0$ pontbeli érintőegyenes egyenletét!

a) $\boxed{8}$ $f(x) = e^{\ln(2+x^2)^{3x}} = e^{3x\ln(2+x^2)}$ (2) $\quad (D_f = \mathbb{R})$

$f'(x) = e^{3x\ln(2+x^2)} \cdot \left(3x \cdot \ln(2+x^2)\right)' =$ (3)

$= (2+x^2)^{3x}\left(3 \cdot \ln(2+x^2) + 3x\,\frac{1}{2+x^2} \cdot 2x\right)$ (3)

b.) $\boxed{4}$ $y_é = f(0) + f'(0)(x-0) = 1 + 3\ln 2 \cdot x$ (2) (2)

5. feladat (10 pont)

$$f(x) = \frac{(x-5)^3}{x+1}$$

a) $f'(x) = ?$, $\quad D_{f'} = ?$
b) Adja meg azokat a legbővebb nyílt intervallumokat, amelyeken a függvény monoton nő, illetve monoton csökken!

$x \neq 1$:

$f'(x) = \frac{3(x-5)^2(x+1) - (x-5)^3 \cdot 1}{(x+1)^2}$ (3) $= \frac{\overbrace{(x-5)^2}^{\geq 0}(2x+8)}{\underbrace{(x+1)^2}_{>0}}$ (2)

	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,-1)$	-1	$(-1,5)$	5	$(5,\infty)$
f'	$-$	0.	$+$	$\nexists$	$+$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$	szak. h.	$\nearrow$		$\nearrow$

(2)

f mon. csökkenő $(-\infty,-4)$-en (1)
f mon. nő $(-4,-1)$-en és $(-1,\infty)$-en (2)

an1z2 120412/3.

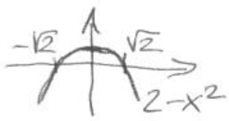
6. feladat (11 pont)

$$f(x) = \ln\,(4 + 2x^2)$$

a) $f'(x) = ?\,, \qquad f''(x) = ?$

b) Adja meg azokat a legbővebb nyílt intervallumokat, amelyeken a függvény alulról konvex, illetve alulról konkáv! Hol van inflexiós pontja a függvénynek?

$f'(x) = \dfrac{4x}{4+2x^2}$ 3 $\qquad x \in \mathbb{R}$



$f''(x) = \dfrac{4\,(4+2x^2) - 4x \cdot 4x}{(4+2x^2)^2}$ 3 $= \dfrac{8\,(2-x^2)}{\underbrace{(4+2x^2)^2}_{>0}}$

	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}, \infty)$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\frown$	infl. pont	$\smile$	infl. pont	$\frown$

5

7. feladat (24 pont)

$a)\ \lim\limits_{x\to\infty} (3x+2)\,e^{-2x} = ?$

$b)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(6x^2)}{1 - \cos 4x} = ?$

c) $\lim\limits_{x\to 0+} x^4 \ln x^3 = ?$

$d)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{2x} - 3\,e^{4x} + 3e^{-3x}}{2\,e^{3x} + 5\,e^{4x} + e^{-x}} = ?$

a.) $\lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{(3x+2)\,e^{-2x}}_{\infty \cdot 0} = \lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{\dfrac{3x+2}{e^{2x}}}_{\frac{\infty}{\infty}} =$

$\boxed{5}$

$\overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{e^{2x}\cdot 2} = 0$

b.) $\boxed{7}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 6x^2}{1-\cos 4x} \overset{L'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-(6x^2)^2}} \cdot 12x}{\sin 4x \cdot 4} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{1-36x^4}}}_{\to 1} \underbrace{\left(\dfrac{4x}{\sin 4x}\right)}_{\to 1} \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{4}$

c.) $\boxed{6}$ $\lim\limits_{x\to 0+} \underset{0\cdot\infty}{x^4 \ln x^3} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x^3}{\underbrace{\frac{1}{x^4}}_{=x^{-4}}} \overset{L'H}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}$

$= \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\frac{1}{x^3} \cdot 3x^2}{-4x^{-5}} = \lim\limits_{x\to 0+} -\dfrac{3}{4} x^{-1+5} = \lim\limits_{x\to 0+} -\dfrac{3}{4}x^4 = 0$

d.) $\boxed{6}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{\dfrac{e^{4x}}{e^{4x}}}_{=1} \dfrac{e^{-2x}-3+3e^{-7x}}{2e^{-x}+5+e^{-5x}} = \dfrac{0-3+0}{0+5+0} = -\dfrac{3}{5}$

Pótfeladat (csak a 40 pont eléréséig javítjuk ki):

8. feladat (11 pont)

a) A jobb és bal oldali határértékek kiszámítása után döntsön, hogy hol és milyen szakadása van az alábbi függvénynek!

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{(x^2-x-6)(x-3)}$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}(-8x)}{\operatorname{arctg}(4x)} = ?$

a.) $f(x) = \dfrac{\sqrt{(x+2)^2}}{(x+2)(x-3)(x-3)} = \dfrac{|x+2|}{x+2} \dfrac{1}{(x-3)^2}$

Szakadási pontok: $x=-2$ és $x=3$ 1

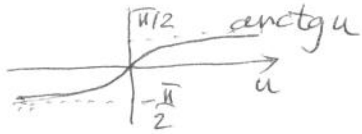
$$f(-2-0)=\lim_{x\to -2-0} \underbrace{\frac{-(x+2)}{x+2}}_{=-1} \frac{1}{(x-3)^2} = -\frac{1}{25}$$

$$f(-2+0)=\lim_{x\to -2+0} \underbrace{\frac{x+2}{x+2}}_{=1} \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{1}{25}$$

} véges ugrás (elsőfajú szak.) 4

$$\lim_{x\to 3} \underbrace{\frac{|x+2|}{x+2}}_{=1} \frac{1}{\underbrace{(x-3)^2}_{\to +0}} = +\infty$$: másodfajú szakadás 3

b.) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg}(-8x)}{\operatorname{arctg}(4x)} = \frac{-\pi/2}{\pi/2} = -1$$ 3



9. feladat (9 pont)

$$f(x) = \operatorname{sh}\left(\frac{x^3}{3} - 9x + 7\right)$$

a) Keresse meg a függvény monotonitási intervallumait!

b) Hol van lokális szélsőértéke f-nek és milyen jellegű?

$D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \underbrace{\operatorname{ch}\left(\frac{x^3}{3} - 9x + 7\right)}_{\geq 1} \cdot (x^2-9)$$ 3

	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,3)$	3	$(3,\infty)$
f'	+	0	−	0	+
f	↗	lok. max	↘	lok. min.	↗

6