V. gyakorlat

2010. XI. 30.

Konzultáció

~~Poisson-közelítés~~

(1.) λ~ ha ~~kö~~ BINOM(n, p) eloszlás van

megfigyelés — annyi sikeres.

~~n nagy és p kicsi~~

$n \to \infty$

Poisson-közelítés

$p \to 0$

(a gyakorlati életben azt mondjuk, hogy p nagyon kicsi)

~~pl. könyvben [illegible] ... van, az ilyen.~~

pl: egy könyv oldalain egy oldalon lévő sajtóhiba

vagy

hány baleset történik egy nap a városban.

$(n \cdot p) \to \lambda$

binomiális várható érték

ez lesz a Poisson várható értéke

Normális közelítés

p fix. (0 és 1 között)

pl: emberek magassága > 170cm -e.

A kettő nem tud egy fix számhoz tartani.

$n \cdot p \to \infty$ lesz.

$X - E(X)$ kell, hogy valami értelmeset kapjunk.

$$\frac{X - E(X)}{D(X)} \sim N(0,1)$$

normális eloszlású (0,1) paraméterekkel.

mindenkire dolgozunk
egy fgtln. kísérletet.

X várható értéke n-nel egy
nagyságrendű.

A szórás $\sqrt{n}$-nel függ
össze → a szórásnégyzetek
összeadódásával adódik X
szórásnégyzete.

(4.)

3/10.

$X_1, X_2, \ldots, X_{200}$ a termelések

$$S_n = E\left(\sum_{k=1}^{200} X_k\right) = 1000$$

az összes termelés
várható értéke

$$\forall k\text{-ra: } \underset{a_k}{0} \le X_k \le \underset{b_k}{50}$$

Ami termelés jut egy alkatrészre, az a várható értéke ennél
az összegnek

Hoeffding:

$$P\left(S_{200} \geq ES_{200} + t\right) \le \exp\left[-\frac{2t^2}{\sum_{k=1}^{200}(b_k - a_k)^2}\right] \le$$

$$\le 10^{-10}$$

ez tehát egy durvább
becslés.

t ebből meghatározható, ehhez még
csak hozzá kell adni 1000-et.

$$\exp\left(-\frac{2t^2}{200 \cdot 50^2}\right) = 10^{-10}$$

$$-\frac{2t^2}{200 \cdot 50^2} = \ln 10^{-10}$$

$$t = \sqrt{-\frac{\ln 10^{-10}}{\cancel{}} \cdot 100 \cdot 50^2} \approx 2400$$

A termelhetőség így legyen: $E(S_n)+t = 3400$ Pa,
ez biztos jó lesz.

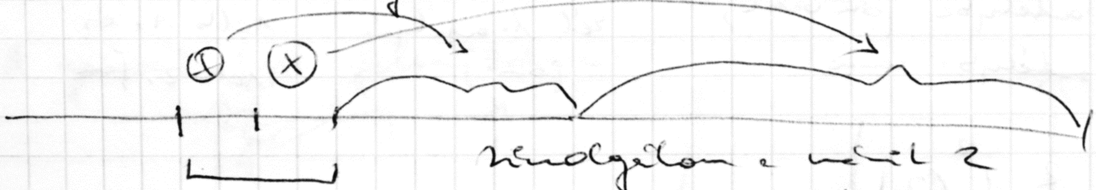
2/10. Előadáson volt egy nem prioritásos.
↓ 1-féle vonat van és kiszolgálása 2 időegység.

Lehet úgy, hogy

- nem érkezik senki → 2 alatt vége lesz
- 1 valaki érkezik → megismétlődik a generátorfüggvény egy olyannal, mint amilyen az eredeti volt.
- ha mindkét időegység alatt érkezik vonat, akkor a generátorfgv. négyzete kell.

Ez az ábrán:

érkezik 2 vonat



kiszolgálom a mind 2 vonatot is,

1. vonat kiszolgálási ideje

$$g(z) = z^2 \cdot \left(\underbrace{(1-p)^2}_{\text{nem jön új}} + \underbrace{2(1-p)p \cdot g(z)}_{\text{1 vonat jön}} + p^2 \cdot (g(z))^2 \right)$$

Ha egy 2. osztályú csomag is van, akkor az előbbi ugyanúgy végezzük, mint az előbb.

~~Ahogy a 2. osztályt is kiszolgáltuk, addig az első osztályúak~~

Ha 2-féle csomag van:

legyen $h(z)$ a generátorfüggvénye:

$$h(z) = E(z^{Y})$$

, ahol Y = kiszolgálási idő kétféle csomag esetén. (és egy 1 db 2. osztályút épp elkezdtünk kiszolgálni)

$$h(z) = \underbrace{z^2}_{\text{2 időegység telik el, míg elkezdjük kiszolgálni}} \Big(\underbrace{(1-p-r)^2}_{\text{nem jön senki}} + \underbrace{2(1-p-r)\cdot p}_{\text{1. osztályba jön valaki, 2. osztályba nem jön senki}} \cdot \underbrace{g(z)}_{\text{ez az előbb felírt } g(z)\text{, mert őt is ki kell szolgálni}} +$$

$$+ \underbrace{2(1-p-r)\cdot r \cdot h(z)}_{\text{2. osztályba jön valaki, 1. osztályba senki}} + \underbrace{p^2 \cdot g^2(z)}_{\text{két 1. osztályú jön}} + \underbrace{2 \cdot p \cdot r \cdot g(z) \cdot h(z)}_{\text{1 db 1. és 1 db 2. jön}} +$$

$$+ \underbrace{r^2 \cdot h^2(z)}_{\text{2 db 2. osztályú jön}} \Big)$$

A $g(z)$-t az elején ki kell számolni.

3.
$$g(z) = E(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) \cdot z^k$$

$$g(0) = P(X=0)$$

$$g'(1) = E(X)$$

$$g(1) = 1$$

Elágazó folyamatnál, ahol a várható érték annyiadik hatványát kell venni, ahányadik generációról van szó.

$\downarrow$

A 2. generáció nagyságának generátorfüggvénye ez

$$g(g(z))$$

A 3. generációé: $g(g(g(z)))$

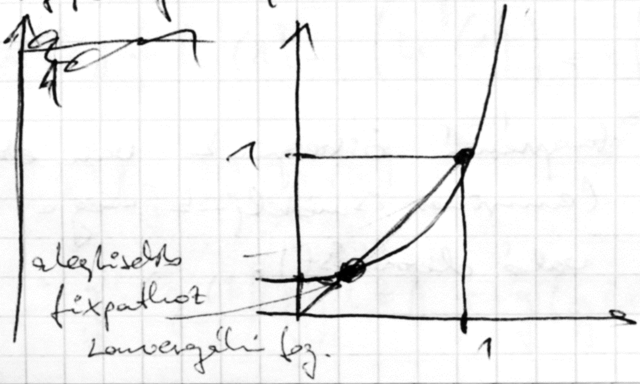
$\vdots$

k. generáció: $g \circ \dots \circ g$ kompozíció

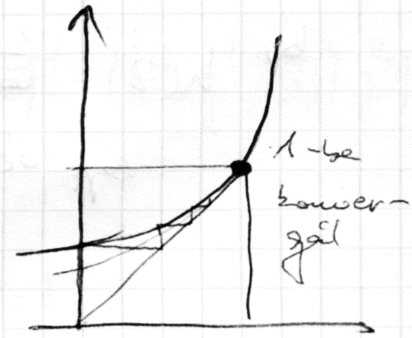
$$\underbrace{g \circ g \circ \dots \circ g}_{k\text{-szor}}(0) = P(k\text{-adik generáció üres})$$

↑ mindenki kihalt.

A generátorfügv. felrajzolva:



vagy



Ha $z \to \infty$, akkor a kihalás valószínűségéhez tart.

A fixpont-egyenlet megoldásával lehet a kihalást megoldani.

A: $g'(1)$ derivált - középérték (várható érték)

$\downarrow$ utódeloszlás várható értéke.

Ha < 1, akkor a kihalás valószínűsége 1, vagyis ki fog halni.

2/4.

piros kockával $\to Y$

Y-szor dobunk kékkel $\to$ összeg $= X$

a) 1 dobókockára (ez csak a pirosra van csak)

$g(z) = E(z^Y)$ kell.

valószínűségekkel súlyozzuk a z hatványait.

$$= \frac{1}{6}z + \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{6}z^4 + \frac{1}{6}z^5 + \frac{1}{6}z^6$$

Ebből $E(Y) = g'(1) = \frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} +$

$$+ 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7\cdot 3}{6} = \underline{\underline{3{,}5}}$$

b) $h(z) = E(z^X) =$

egy véletlen tagszámú összegünk van ekkor. (ahányszor ismételjük meg a kék kockával való dobálást).

$$= g(g(z))$$

$\uparrow$

az eredeti

generátorfgv. kompozíciója

$$\text{Először } E(X) = \overset{h'(1)=}{\left[g(g(1))\right]'} = g'(\underbrace{g(1)}_{1}) \cdot g'(1) =$$

$$= \left(g'(1)\right)^2 = 3{,}5^2$$

~~$\sigma^2(X)$~~ Absztrakt:

legyen $\ell(z) = E(z^W)$

$\Downarrow$

$$\ell'(z) = E\left(W z^{W-1}\right)$$

$$\ell''(z) = E\left((W-1)\cancel{W} \cdot z^{W-2}\right)$$

$$\ell''(1) = E\left(W(W-1)\right) = E(W^2) - E(W)$$

$\Downarrow$

$$E(W^2) = \ell''(1) + \ell'(1)$$

~~és $\sigma^2(X)$=~~

így a ~~második~~ szórásnégyzet:

$$D^2(X) = h''(1) + h'(1) - \left(h'(1)\right)^2 = g''(g(1))\left(g'(1)\right)^2 + g'(g(1)) \cdot g''(1)$$

$$h'(z) = g'(g(z)) \cdot g'(z)$$

$$h''(z) = g''(g(z))\left(g'(z)\right)^2 + g'(g(z)) \cdot g''(z)$$

$$+h'(1) - (h'(1))^2 = g''(1)\cdot (g'(1))^2 + g'(1)\cdot g''(1) +$$
$$+ h'(1) - (h'(1))^2$$

$$g''(z) = \overset{\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 0} + \frac{1}{6}\cdot 2\cdot 1 + \overset{1}{\frac{1}{6}\cdot 3\cdot 2} + \overset{12}{\frac{1}{6}\cdot 4\cdot 3} + \overset{\frac{20}{6}}{\frac{1}{6}\cdot 5\cdot 4} +$$
$$+ \frac{1}{6}\cdot 6\cdot 5 = 8{,}5 + \frac{20}{6}$$

c) Milyen előjelű $cov(X,Y)$

heurisztikus: pozitív, mert dobunk valahány kockával, minél többet dobunk az elején, annál többel tudunk következőleg is dobni.

$$cov(X,Y) = \underbrace{E(X\cdot Y)}_{\text{feltételes várható érték tétel}} - E(X)\cdot E(Y)$$

$$E(XY) = \sum_{k=1}^{6} \underbrace{E(XY \mid Y=k)}_{k^2\cdot 3{,}5}\cdot \underbrace{P(Y=k)}_{\frac{1}{6}}$$

2/11. A szórása = ?

$X_1, X_2, \dots X_{30}$ ← indikátor valószínűségi változók.

$$S_{30} \sim BINOM(\overset{p}{0{,}7}; \overset{n}{30}) \qquad S_{30} = \sum_{k=1}^{30} X_k$$
$$\downarrow$$
$$D^2 S_{30} = 30\cdot 0{,}7\,(1-0{,}7)$$
$$n\cdot p(1-p)$$

2/12.

$X_1, X_2, \dots, X_{100}$

független azonos eloszlásúak.

$P(X_1 = 1000) = \frac{18}{37}$ ez az, hogy jót húzol ki, ilyenkor nyer 1000 Ft-ot

$P(X_1 = -1000) = \frac{19}{37}$

$S_{100} = \sum_{k=1}^{100} X_k$

Akkor $P(S_{100} \leq -3000) = ?$ a kérdés.

Ha ez a valószínűség kicsi, akkor azzal nem lehet gyarapodni.

CHT-vel:

$$E(X_1) = \frac{18}{37} \cdot 1000 + \frac{19}{37} \cdot (-1000) = -1000 \cdot \frac{1}{37} \qquad E(S_{100}) = -10^5 \cdot \frac{1}{37}$$

$$E(X_1^2) = \frac{18}{37} \cdot 1000^2 + \frac{19}{37} (-1000)^2 = 10^6$$

$$D^2(X_1) = E(X_1^2) - (E(X_1))^2 = 10^6 - \frac{10^6}{37^2} =$$

$$D(X_1) = 1000 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{37^2}} \qquad D^2(S_{100}) = 10^8 \cdot \left(1 - \frac{1}{37^2}\right)$$

$$D(S_{100}) = \sqrt{D^2(S_{100})}$$

Ekkor $P(S_{100} \leq -3000) = P\left(\frac{S_{100} - E(S_{100})}{D(S_{100})} \leq \frac{-3000 - E(S_{100})}{D(S_{100})}\right)$

$$= P\Bigg(\underbrace{\frac{S_{100} - E(S_{100})}{D(S_{100})}}_{N(0,1)} \leq \frac{-3000 + 10^5 \cdot \frac{1}{37}}{10^4 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{37^2}}}\Bigg)$$

$$\phi(-0{,}03) = 1 - \phi(0{,}03) = 1 - 0{,}512 \approx \underline{0{,}49}$$

3/2

c, $g(z) = \dfrac{p}{1-(1-p)z}$

$p = \dfrac{1}{4}$ ↘

$$g(z) = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{3}{4}z} = \frac{1}{4-3z}$$

$$g(z) = z$$

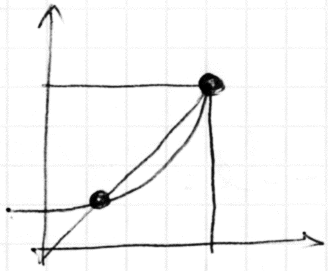
$$\frac{1}{4-3z} = z$$

$$1 = z(4-3z)$$

$$3z^2 - 4z + 1 = 0$$

$$(3z-1)(z-1) = 0$$

$z = \dfrac{1}{3}$ $z = 1$



4/7.

tranziens áll. komplementere

$$P = \begin{array}{c|cc} & T & T^c \\ \hline T & Q & R \\ T^c & 0 & S \end{array}$$

i

Lépünk a Markov-lánccal -> a szereplő valószínűségek szerint választunk.

Ha T-ből T^c-t választok, akkor a T^c-beli sorai olyanok, hogy T-nek a metszetük 0-s nem tudok visszamenni T-be, csak T^c-belibe

Ha $i \in T$ és $j \in T^c$

akkor hol fogunk a T^c-be kilyukadni:

$$u_{ij} = P(X_\alpha = j \mid X_0 = i) =$$

↑ egy valószínűségi eloszlás lesz.

Bizonyítani akarjuk:

$$u_{ij} = \sum_{k \in T} u_{ik} \cdot u_{kj} + p_{ij}$$

Feltételesen nézünk egy elsődleges eseményre -> mi az első lépése a Markov-láncnak.

i-t fixnek tartjuk.

teljes valószínűség tételével

$$= \sum_{l \in T \cup T^c} P(X_\alpha = j \mid X_0 = i, X_1 = l) \cdot P(X_1 = l \mid X_0 = i)$$

↑ Markov-tulajdonság miatt ez kihagyható

$$= \sum_{l \in T} P(X_\alpha = j \mid X_1 = l) \cdot p_{il} + \underbrace{\sum_{l \in T^c} P(X_\alpha = j \mid X_1 = l) \cdot p_{il}}_{= p_{ij}}$$

Q_{il}-nel is lehető

ez α az első olyan lépés, amikor T^c-be jutottam. De mert $l \in T^c$ az első elemmel, így $\alpha = 1$.
Vagyis $P(X_1 = j \mid X_1 = l) = ?$ kell.
Ez csak akkor $\neq 0$, ha $l = j$
Így ez a $\Sigma = p_{ij}$

$$\Phi(-0{,}03) = 1 - \Phi(0{,}03) = 1 - 0{,}512 \approx \underline{0{,}49}$$

3/2

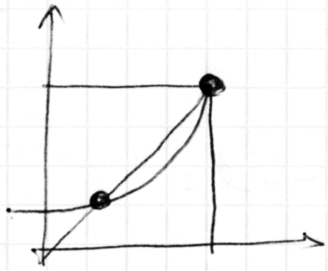
c) $$g(z) = \frac{p}{1-(1-p)z}$$

$p = \frac{1}{4}$ ↘

$$g(z) = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{3}{4}z} = \frac{1}{4-3z}$$

$$g(z) = z$$

$$\frac{1}{4-3z} = z$$



$$1 = z(4-3z)$$

$$3z^2 - 4z + 1 = 0$$

$$(3z-1)(z-1) = 0$$

$z = \frac{1}{3}$ $\quad$ $z = 1$

4/7.

tranziens áll.
komplementere

$$P = \begin{array}{c|cc} & \overbrace{\quad}^{T} & \overbrace{\quad}^{T^c} \\ \hline T & Q & R \\ T^c & 0 & S \end{array}$$

Lépünk a Markov-lánccal → a szereplő valószínűségek szerint választunk.

Ha T-ből T^c-t választok, akkor a T^c-beli sorai olyanok, hogy T-vel a metszetük 0-s, nem tudok visszamenni T-be, csak T^c-belibe

Ha $i \in T$ és $j \in T^c$
akkor hol fogunk a T^c-be kilyukadni:

$$u_{ij} = P(X_\alpha = j \mid X_0 = i) =$$

↑ egy valószínűségi eloszlás lesz.

Bizonyítani akarjuk:

$$u_{ij} = \sum_{k \in T} u_{ik} \cdot u_{kj} + p_{ij}$$

Feltételesen nézünk egy elsődleges eseményre -> mi az első lépése a Markov-láncnak.

i-t fixnek tartjuk.

teljes valószínűség tételével

$$= \sum_{l \in T \cup T^c} P(X_\alpha = j \mid X_0 = i, X_1 = l) \cdot P(X_1 = l \mid X_0 = i)$$

↑ Markov-tulajdonság miatt ez kihagyható

$$= \underbrace{\sum_{l \in T} P(X_\alpha = j \mid X_1 = l) \cdot p_{il}} + \underbrace{\sum_{l \in T^c} P(X_\alpha = j \mid X_1 = l) \cdot p_{il}}_{= p_{ij}}$$

q_{il}-nel is lehet

ez α az első olyan lépés, amikor T^c-be jutottam. De mivel $l \in T^c$ az első elemmel, így $\alpha = 1$.
Vagyis $P(X_1 = j \mid X_1 = l) = ?$ kell.
Ez csak akkor $\neq 0$, ha $l = j$
így ez a $\Sigma = p_{ij}$

Ugyanis:

~~kéne egy U mátrix~~

$$T\,\overset{T^c}{\boxed{U}} = T\,\overset{T}{\boxed{Q}} \cdot T\,\overset{T^c}{\boxed{U}} + T\,\overset{T^c}{\boxed{R}}$$

4/10.

$$\underset{\text{állapottér}}{S} = \left\{ \overset{\text{tétlen}}{T},\ A,\ B_1,\ B_2 \right\}$$

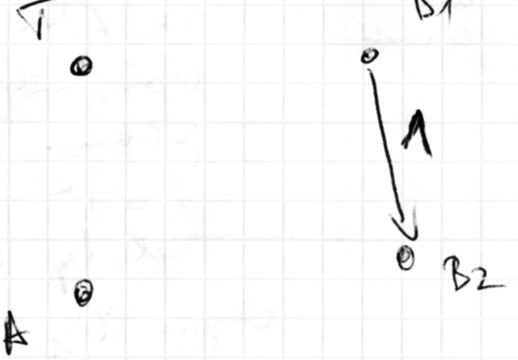
ezeket végezheti.

Stratégiák:

1. stratégia: A-t veretjük

		bevétel	valség
A munka	1 hónap	1,6 m ~~bevétel~~	0,6
B munka		3 m	0,5

Mik az átmenet-valószínűségek:



~~Az új munka egyfajta válás~~

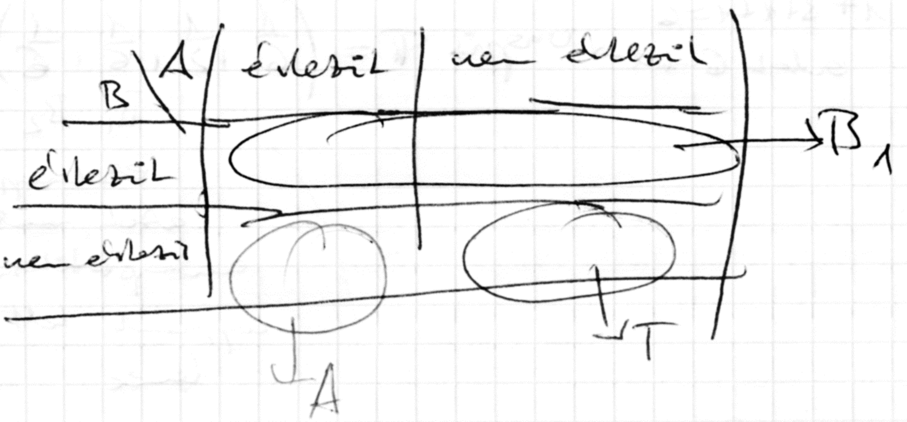
B \ A	élvezik	nem élvezik	B_1-et választjuk
élvezik	0,3	$(1-0{,}6)\cdot 0{,}5 = 0{,}2$	→ ez a utolsó egy marginális: B-é.
nem élvezik	$0{,}6\cdot(1-0{,}5) = 0{,}3$	$(1-0{,}6)(1-0{,}5) = 0{,}2$	

↓ ezzel megyünk tételbe (T)

A-t választjuk

↑ 1. stratégia! (A-t nevezzük!)

2. stratégia:



Az átmenetmátrix:

$$P = \begin{array}{c} \\ T \\ A \\ B_1 \\ B_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T & A & B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

↑ 1. stratégia.

$$P = \begin{array}{c} \\ T \\ A \\ B_1 \\ B_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T & A & B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

↑ 2. stratégia.

~~Meg kell nézni~~ Ez 2 különböző Markov-lánc,
2: kell nézni a stac. eloszlást.
⊙ Végén össze kell hasonlítani.

$$P^T - I = \cancel{\begin{bmatrix} -0{,}8 & 0{,}6 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & -0{,}4 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -0{,}8 & 0{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & -0{,}4 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & -1 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

1. stratégiára

$$\sim \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -6 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 15 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} t \\ 3t \\ t \\ t \end{bmatrix}$$

$(1 \ 3 \ 1 \ 1)$ ← ez lesz a stacionárius mérték,

$1+3+1+1=6$
ezért 6-tal → vagyis $\pi = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$

B_1 B_2

ezek vannak azok, amit amúgy többször vagyunk kell lenne

$f: S \to \mathbb{R}$ bevétel

$f(T) = 0$

$f(A) = 1{,}6$

$f(B_1) = 0$

$f(B_2) = 3$ } vagyis így. (de lehetne bárhogy)

Ekkor $E_\pi f = \frac{1}{2} \cdot 1{,}6 + \frac{1}{6} \cdot 3 = 1{,}3$