1. feladat (10 pont)
Hol és milyen típusú szakadásai vannak a következő függvénynek? A szakadási helyeken határozza meg a bal és jobb oldali határértékeket!

$$f(x) = \frac{|x-2|\sin(x-1)}{x^2-3x+2}$$

Megoldás: Tanult tételek szerint f folytonos, így csak az értelmezési tartomány határán lehet szakadása, azaz a nevező zérushelyein $\boxed{\textbf{1p.}}$.

$x=1$: $\lim_{x\to 1\pm} f(x) = \lim_{x\to 1\pm} \frac{|x-2|}{x-2}\frac{\sin(x-1)}{x-1} = -1\cdot 1 = -1.$ $\boxed{\textbf{3p.}}$
Mivel a féloldali határértékek léteznek, végesek és megegyeznek, ezért itt megszüntethető szakadás van. $\boxed{\textbf{1p.}}$

$x=2$: $\lim_{x\to 2\pm} f(x) = \lim_{x\to 2\pm} \frac{|x-2|}{x-2}\frac{\sin(x-1)}{x-1} = \pm 1\cdot\sin 1 = \pm\sin 1.$ $\boxed{\textbf{4p.}}$
Mivel a féloldali határértékek léteznek, végesek de különbözőek, ezért itt véges ugrás van. $\boxed{\textbf{1p.}}$

2. feladat (7+4=11 pont)
A derivált definíciójának alapján határozza meg az

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

függvény deriváltját, és írja föl a függvény grafikonját az $x_0 = 2$ pontban érintő egyenes egyenletét!

Megoldás: $f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ $\boxed{\textbf{3p.}}$ $= \lim_{x\to 2}\frac{3(x-1)-(x+1)}{(x+1)3(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{2}{(x+1)3}$ $\boxed{\textbf{3p.}}$ $= \frac{2}{9}$ $\boxed{\textbf{1p.}}$.

Az $x_0 = 2$-beli érintőegyenes: $y(x) = f'(2)(x-2)+f(2) = \frac{2}{9}(x-2)+\frac{1}{3}$ $\boxed{\textbf{4p.}}$ $= \frac{2}{9}x - \frac{1}{9}$.

3. feladat (4+4=8 pont)
Határozza meg a következő függvények deriváltját!

$$a)\quad f(x) = \sqrt{\frac{x^2+2}{e^x+1}}, \qquad\qquad b)\quad g(x) = e^{2x}\operatorname{arsh}(x^2+2).$$

Megoldás:

1. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+2}{e^x+1}}}\dfrac{2x(e^x+1)-(x^2+2)e^x}{(e^x+1)^2}$ $\boxed{\textbf{4p.}}$
2. $g'(x) = 2e^{2x}\operatorname{arsh}(x^2+2) + e^{2x}\dfrac{1}{\sqrt{1+(x^2+2)^2}}2x$ $\boxed{\textbf{4p.}}$

4. feladat (5+5=10 pont)
Határozza meg a következő határértékeket!

$$a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(2x^2)}{\operatorname{tg}^2(x)}=?,\qquad\qquad b)\quad \lim_{x\to 0+} x^x=?$$

Megoldás:

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(2x^2)}{\operatorname{tg}^2(x)} \overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-4x^4}}4x}{2\operatorname{tg}x\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos^3 x}{\sqrt{1-4x^4}}\frac{x}{\sin x} = 2\cdot 1 = 2\ \boxed{\textbf{5p.}}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0+}(x\ln x) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x} \overset{\frac{\infty}{\infty}\text{L'H}}{=\!=} \lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+} -x = 0\ \boxed{\textbf{3p.}}$, ezért mivel e^x folytonos a 0-ban, $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^0 = 1\ \boxed{\textbf{2p.}}$

5. feladat (11 pont)
Vizsgálja meg, hogy hol konvex, konkáv az

$$f(x) = x^2e^{2x}$$

függvény! Hol van a függvénynek inflexiós pontja?

Megoldás: $D_f=\mathbb{R}$. $f'(x)=2xe^{2x}+x^22e^{2x}$, és $f''(x)=2e^{2x}+2x2e^{2x}+2x2e^{2x}+x^24e^{2x}=2e^{2x}(2x^2+4x+1)$ $\boxed{\textbf{2p.}}$

$f''(x)=0$ $\boxed{\textbf{1p.}}$ $\iff 2x^2+4x+1=0 \iff x=-1\pm\sqrt{2}/2$ $\boxed{\textbf{1p.}}$.

	$]-\infty,-1-\frac{\sqrt2}{2}[$	$-1-\frac{\sqrt2}{2}$	$]-1-\frac{\sqrt2}{2},-1+\frac{\sqrt2}{2}[$	$-1+\frac{\sqrt2}{2}$	$]-1+\frac{\sqrt2}{2},\infty[$
f	konvex	inflexió	konkáv	inflexió	konvex $\boxed{\textbf{2p.}}$
f''	+	0	-	0	+ $\boxed{\textbf{2p.}}$

Az f függvény konvex a $]-\infty,-1-\frac{\sqrt2}{2}]$ és a $[-1+\frac{\sqrt2}{2},\infty[$ intervallumon, illetve konkáv a $[-1-\frac{\sqrt2}{2},-1+\frac{\sqrt2}{2}]$ intervallumon. Inflexiója van a $-1-\frac{\sqrt2}{2}$ és a $-1+\frac{\sqrt2}{2}$ pontokban. $\boxed{\textbf{3p.}}$