2. Villamosmérnök szigorlat - MEGOLDÁSOK

1. (**20 pont**)
   Végezzen teljes függvényvizsgálatot az

$$f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$$

függvényen és vázolja fel a függvényt!

Megoldás:

- $\mathcal{D}_f = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ (következésképpen nem lehet sem páros, sem páratlan, sem periodikus) $\boxed{\text{2 pont}}$
- $$f(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{nincs zérushely} \qquad \boxed{\text{1 pont}}$$
  $$f(0) = e \quad (y \text{ tengelymetszet}) \qquad \boxed{\text{1 pont}}$$
- Mivel
  $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1-x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{1-x}} = 1, \qquad \boxed{\text{2 pont}}$$
  hiszen az exponenciális függvény folytonos.
  Mivel
  $$\lim_{x \to 1 \pm 0} \frac{1}{1-x} = \mp\infty,$$
  ezért az exponenciális függvény folytonossága miatt
  $$\lim_{x \to 1-0} e^{\frac{1}{1-x}} = \infty, \quad \text{illetve} \quad \lim_{x \to 1+0} e^{\frac{1}{1-x}} = 0. \quad \boxed{\text{2 pont}}$$
- monotonitás vizsgálata
  $$f'(x) = e^{\frac{1}{1-x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} > 0, \qquad \boxed{\text{2 pont}}$$
  ezért az f függvény az egész értelmezési tartományán **szigorúan monoton növő**. $\boxed{\text{2 pont}}$
- konvexitás vizsgálata
  Például törtként deriválva:
  $$f''(x) = \frac{e^{\frac{1}{1-x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \cdot (1-x)^2 + e^{\frac{1}{1-x}} \cdot 2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{(1-x)^4}(3-2x) \qquad \boxed{\text{2 pont}}$$

$$f''(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 3 - 2x = 0 \quad \Longleftrightarrow x = \frac{3}{2},$$

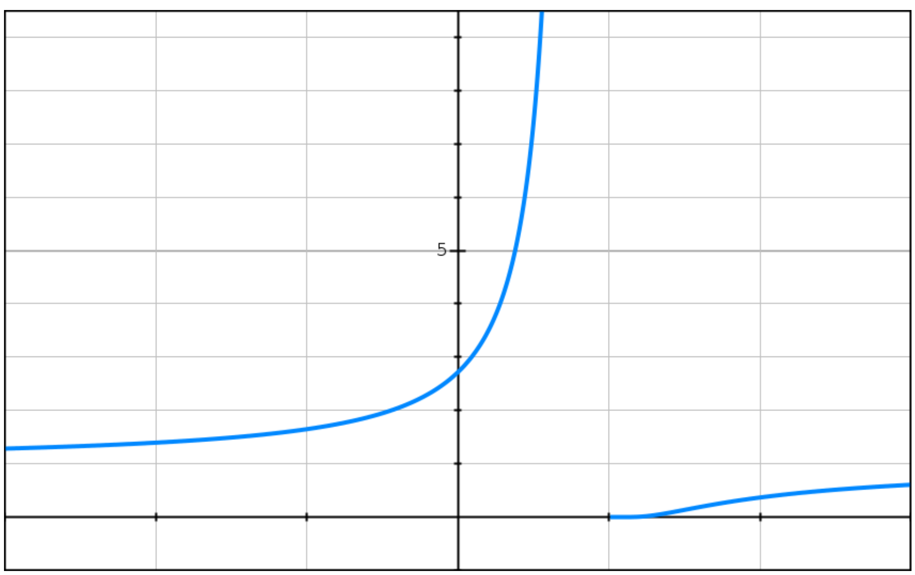
$$f''(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 3 - 2x > 0 \quad \Longleftrightarrow x < \frac{3}{2}$$

Ezek alapján táblázatba foglalva:

x	$(-\infty, 1)$	$(1, 3/2)$	$3/2$	$(3/2, \infty)$
f''	$+$	$+$	0	$-$
f	$\cup$	$\cup$	$INFL. = e^{-2}$	$\cap$

$\boxed{\text{3 pont}}$

- Ábrázolás $\boxed{\text{3 pont}}$



Az $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$ függvény gráfja.

2. (**15+15 pont pont**)
Határozza meg az alábbi kettős integrálok értékét!

(a)

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$$

Megoldás:
Az integrálási tartomány:

$$0 \le x \le \sqrt{1-y^2}, \quad 0 \le y \le 1.$$

Az első egyenlőtlenségből

$$x^2+y^2 \le 1,$$

és mivel fennáll, hogy $x, y \ge 0$, ezért az integrálási tartomány az origó középpontú egységkörlap I síknegyedbe eső része. $\boxed{\text{2 pont}}$

Polárkoordinátákra áttérve:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad |J| = r \text{ (Jacobi-determináns)}$$

$$0 \le r \le 1, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}. \qquad \boxed{\text{3 pont}}$$

Ezekkel

$$I_1 \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{2 pont}}}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sin r^2 r\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\int_0^1 2r\sin r^2\,\mathrm{d}\,r\right)\mathrm{d}\,\varphi \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{4 pont}}}}{=}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\cos r^2\right]_{r=0}^1 \mathrm{d}\,\varphi = \frac{1-\cos 1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\,\varphi \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{4 pont}}}}{=} \frac{\pi(1-\cos 1)}{4}.$$

(b)

$$I_2 = \int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} \, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y.$$

Megoldás:
Az integrálást ebben a sorrendben nem tudjuk elvégezni, ezért meg kell cserélni az integrálás sorrendjét. Az integrálási tartomány:

$$T : y \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

melyet átírva:

$$T : 0 \leq y \leq x, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad \boxed{5 \text{ pont}}$$

Ezzel:

$$I_2 = \int_0^1 \underbrace{\int_0^x e^{x^2} \, \mathrm{d}\, y}_{\left[e^{x^2} y\right]_{y=0}^{x} = xe^{x^2}} \, \mathrm{d}\, x \underset{\boxed{4 \text{ pont}}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \frac{1}{2} \int_0^1 2xe^{x^2} \, \mathrm{d}\, x \underset{\boxed{4 \text{ pont}}}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$= \frac{1}{2} \left[e^{x^2}\right]_0^1 \underset{\boxed{2 \text{ pont}}}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{e-1}{2}.$$

3. (**15 pont**)

Milyen c valós paraméter érték mellett invertálható az

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ c & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrix? A kapott c érték mellett adja meg az

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

egyenlet $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ megoldását! Hogyan válasszuk meg a c paramétert, hogy a kapott $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ megoldásvektor párhozamos legyen a $4x - y + 3z = 5$ egyenletű S síkkal?

Megoldás:

Az invertálhatóság feltétele, hogy a mátrix reguláris legyen, azaz a determinánsa ne legyen zérus. Mivel

$$\det \mathbf{A} = 6 + 3c, \qquad \boxed{\text{3 pont}}$$

ezért $\mathbf{A}$ pontosan akkor invertálható, ha $c \neq -2$. $\boxed{\text{2 pont}}$
Ezen feltétel mellett a megoldandó egyenlet mindkét oldalát balról $\mathbf{A}$-val szorozva (az inverzre tehát nincs szükség!):

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ c & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ c-3 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\text{5 pont}}$$

Az S sík normálvektora:

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

és $\mathbf{x}$ pontosan akkor lesz párhuzamos az S síkkal, ha merőleges az $\mathbf{n}$ normálvektorra. A skalárszorzat:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle = 1 \cdot 4 + 6 \cdot (-1) + (c-3) \cdot 3 = 3c - 11 = 0,$$

ahonnan $c = \frac{11}{3}$. $\boxed{\text{5 pont}}$

4. (**15 pont**)
Egy felűl nyitott, téglatest alakú, V térfogatú tartályt szeretnénk készíteni. Mekkorák legyenek a tartály élei, ha az elkészítéséhez a lehető legkevesebb anyagot szeretnénk felhasználni?
Megoldás:
Jelölje x, y, z az egyes élek hosszát. Ekkor a felül nyitott doboz felszíne:

$$xy + 2xz + 2yz.$$

Mivel $V = xyz$, ahonnan $z = \frac{V}{xy}$, a minimalizálandó függvény:

$$f(x,y) = xy + 2x\frac{V}{xy} + 2y\frac{V}{xy} = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}. \quad \boxed{3 \text{ pont}}$$

A szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a parciális deriváltak nullák legyenek:

$$f'_x(x,y) = y - \frac{2V}{x^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{2V}{x^2} \quad \boxed{1 \text{ pont}}$$

$$f'_y(x,y) = x - \frac{2V}{y^2} = 0 \qquad \boxed{1 \text{ pont}}$$

Innen

$$x - \frac{2V}{y^2} = x - \frac{2V}{\frac{4V^2}{x^4}} = x - \frac{x^4}{2V} = x\left(1 - \frac{x^3}{2V}\right) = 0.$$

Mivel $x > 0$, ezért

$$x = \sqrt[3]{2V}, \quad y = \sqrt[3]{2V} \quad \text{és} \quad z = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}. \quad \boxed{3 \text{ pont}}$$

Meg kell mutatnunk, hogy itt valóban minimum van. A másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{4V}{x^3}, \quad f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 1, \quad f''_{yy}(x,y) = \frac{4V}{y^3}, \quad \boxed{3 \text{ pont}}$$

, ahonnan a Hesse-determináns:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{4V}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{4V}{y^3} \end{vmatrix} = \frac{16V^2}{x^3y^3} - 1. \quad \boxed{2 \text{ pont}}$$

ahonnan mivel

$$H(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = 3 > 0, \quad \text{és} \quad f''_{xx}(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = 2 > 0,$$

valóban minimumunk van. $\boxed{2 \text{ pont}}$

5. (**10+10 pont**)
Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok? Válaszát indokolja!

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4+n^2}{3+n^2}\right)^{n^3} \frac{n^7}{2^{2n+1}}.$$

Megoldás:
Az

$$a_n = \left(\frac{4+n^2}{3+n^2}\right)^{n^3} \frac{n^7}{2^{2n+1}}$$

jelöléssel, a gyökkritériumot használva:

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{4+n^2}{3+n^2}\right)^{n^2} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^7}{4\sqrt[n]{2}} = \frac{\left(1+\frac{4}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{n^2}} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^7}{4\sqrt[n]{2}} \longrightarrow \frac{e^4}{e^3}\frac{1}{4\cdot 1} = \frac{e}{4} \quad \boxed{\text{7 pont}}$$

(Kihasználtuk, hogy $\sqrt[n]{n} \to 1$, $\sqrt[n]{2} \to 1$ és $(1+a/n)^n \to e^a$ minden részsorozatával együtt.)
Mivel $\frac{e}{4} < 1$, ezért a gyökkritérium értelmében a sor konvergens $\boxed{\text{3 pont}}$.

(b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5^{n+2} + 0,7^n}{(2n)! + 3n^2}.$$

Megoldás:
Először majoráns kritériumot használunk:

$$a_n := \frac{2^n + 5^{n+2} + 0,7^n}{(2n)! + 3n^2} < \frac{5^n + 25\cdot 5^n + 5^n}{(2n)!} = \frac{27\cdot 5^n}{(2n)!} := b_n \quad \boxed{\text{3 pont}}$$

Mivel

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{27\cdot 5^{n+1}}{(2n+2)!} : \frac{27\cdot 5^n}{(2n)!} = \frac{5}{(2n+2)(2n+1)} \to 0 < 1, \quad \boxed{\text{5 pont}}$$

a hányadoskritérium értelmében a $\sum b_n$ sor konvergens és majorálja a $\sum a_n$, sort, így az eredeti sor is konvergens. $\boxed{\text{2 pont}}$