A3 3. vizsgazh, 2012 ősz

1. Oldja meg az $y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 17$ kezdetiérték-problémát!

2. Számítsa ki a $v(x, y, z) = (x, y, 0)$ vektorfüggvény fluxusát annak az M magasságú, z tengelyű hengernek a kifelé irányított határán, melynek alaplapja az xy síkbeli, origó középpontú, R sugarú körlap!

3. Legyen $v(x, y, z)$ az $(e^x \sin y - yz, e^x \cos y - xz, z - xy)$ vektorfüggvény. (a) Állapítsa meg, hol van v-nek potenciálfüggvénye! (b) Adja meg v egy potenciálfüggvényét ott, ahol létezik.

4. $\int_K \frac{e^{z^6}-1}{z^6(z-i)}\, dz =?$ ha K az origó középpontú, 2 sugarú pozitívan irányított körvonal.

5. Adja meg az $\frac{1}{z}$ függvény azon 2 körüli Laurent-sorát, ami előállítja i-ben!

6. Igazak-e az alábbi állítások?
(1) Legyen $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, ahol u, $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények.

(a) ha az $(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvény deriválható egy tartományon, akkor f (komplex értelemben) deriválható ugyanott.
(b) ha u és v folytonosan deriválhatók egy tartományon, akkor f (komplex értelemben) deriválható ugyanott.
(2) Legyen $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ és $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ kétszer folytonosan deriválható függvények.
(a) $\operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0$
(b) $\operatorname{div} \operatorname{rot} u = 0$
(c) $\operatorname{div} \operatorname{grad} -u = - \operatorname{div} \operatorname{grad} u$.