

10.1. Termikus zaj

A zajjelenségeket több szempontból is lehet osztályozni. Felosztásunk alapját képezheti a zaj mint sztohasztikus folyamat amplitudóeloszlása, a teljesítménysűrűség-spektrumának a frekvenciától való függése, a zajforrás fizikai természete stb.

A zajforrások egyik fontos osztályát jelentik azok a zajforrások, amelyekben a zaj a hőmérsékleti egyensúly körül létrejövő véletlenszerű fluktuációk következtében jön létre. A fluktuációk pontos leírásával a statisztikus fizika foglalkozik. Mi az elméleti fizikai vizsgálatok végeredményéből indulunk ki, amely szerint egy T abszolút hőmérsékletű (tetszőleges felépítésű) passzív hálózat kapocspárjából kivehető zajteljesítmény-sűrűség a következő egyenlettel jellemezhető (Planck-törvény):

$$S(f) = hf / (\exp(hf/kT) - 1) \quad (10.1)$$

ahol S az egyoldalas teljesítménysűrűség-függvény, f a frekvencia, h a Planck állandó, k a Boltzmann-állandó, T az abszolút hőmérséklet. Az egyenlet megadja a fizikai rendszerből kivehető maximális teljesítményt a frekvencia függvényében.

Kis frekvencián az összefüggés nevezőjében szereplő exponenciális kifejezés változója kicsi, így a függvény Taylor-sorának első két tagjával közelíthető:

$$S(f) = hf / (\exp(hf/kT) - 1) = hf / (\{1 + (hf/kT) + \dots\} - 1) \sim kT \quad (10.2)$$

A közelítés annál pontosabb, minél kisebb a frekvencia, és minél nagyobb a hőmérséklet. Pl. 30 GHz-es frekvencián (hullámhossz 1 cm), 30 K hőmérsékleten a kT értéktől való eltérés közelítően 0,1 dB.

Merőben mások a numerikus viszonyok az optikai tartományban, pl. 200 THz-en λ (hullámhossz 1,5 nm) a zaj nagysága még 1000 K hőmérsékleten is kisebb, mint a kT λ érték ezredrésze. Az előbbieket szerint, a zaj frekvenciafüggése alapján elkülönül a "rádió-" és az "optikai tartomány", a "rádiótartományban" a zaj teljesítménysűrűsége gyakorlatilag állandó (kT), az "optikai tartományban" pedig a termikus zaj elhanyagolható.

A zajteljesítmény általános esetben:

$$P_{zki} = \int_0^{\infty} G(f) S(f) df \quad (10.3)$$

ahol $G(f)$ a vizsgált rendszer elem teljesítményerősítése.

A gyakorlatban az átviteli sávon belül állandónak tekinthető a zaj teljesítménysűrűsége a frekvencia függvényében (fehérzaj):

$$S(f) = N_0 \quad (10.4)$$

A konstans kiemelhető az integrálból, így a zaj teljesítményére a

$$P_{zki} = N_0 G_0 (1/G_0) \int_0^{\infty} G(f) df \quad (10.5)$$

kifejezés adódik, ahol G a sávközépen mért erősítés. A kifejezésből kiolvasható, hogy ha definiáljuk az ún. zajsávszélességet

$$B = (1/G_0) \int_{0 \dots \text{inf}} G(f) df \quad (10.6)$$

akkor a zajteljesítmény szempontjából úgy számolhatunk, mintha az erősítés állandó lenne az egész átviteli sávban.

10.2. Az átviteli rendszer jellemzése a zaj szempontjából

Mivel az átviteli rendszer a saját zaját is hozzáadja az általa feldolgozott jelhez, a kimeneten megjelenik a hasznos jel, a bemeneti forrásból származó zaj, valamint az átviteli rendszer saját zaja. Célszerű és rendszertechnikai számításoknál szokás a jel leírásakor olyan normalizálást alkalmazni, hogy a teljesítményt közvetlenül négyzetre emeléssel lehessen meghatározni. Pl., ha u feszültség mérhető R ellenálláson, akkor a normalizált jel az

$$s = U / \sqrt{R} \quad (10.7)$$

kifejezéssel definiálható. A kimeneti időfüggvény, ha az átviteli sávban a rendszer frekvenciafüggésétől eltekinthetünk:

$$s_{ki} = A s_{be} + A n_{be} + n_I \quad (10.8)$$

ahol A a rendszer átviteli tényezője; s a bemenőjel időfüggvénye; n a bemenőzaj időfüggvénye; n az átviteli rendszer által keltett zaj időfüggvénye. A kimenő átlagteljesítmény:

$$P_{ki} = s_{ki}^2 = a(A s_{be} + A n_{be} + n_I)^2 \quad (10.9)$$

Az egyes komponensek között függetlenséget tételezhetünk fel, ezért az egyes összetevők szorzatának várható értéke nulla, tehát elhagyható:

$$P_{ki} = A^2 n_{be}^2 + A^2 n_{be}^2 + n_I^2 \quad (10.10)$$

Figyelembe véve, hogy az átviteli tényező négyzete a G teljesítményerősítéssel azonos, a

$$P_{ki} = G P_{jbe} + G P_{zbe} + P_z \quad (10.11)$$

alakot kapjuk, ahol P a bemenőjel teljesítménye, P a bemenőzaj teljesítménye és P az átviteli rendszer által termelt zaj teljesítménye. A kifejezés látszólag magától értetődő állítást tartalmaz, nevezetesen azt, hogy a kimenő teljesítmény a felerősített bemenő P jel- és P zajteljesítményből, valamint az átviteli rendszer saját P zajteljesítményéből tevődik össze. Az előbbi levezetés azonban világosan mutatja, hogy a teljesítmények összegzése csak független források feltételezése mellett érvényes, általános esetben viszont a források közötti kapcsolatot is figyelembe kell venni.

Kifejezhetjük a bemenő zajteljesítményt a forrás zajhőmérsékletével is:

$$P_{ki} = G P_{jbe} + G B k T + P_z \quad (10.12)$$

ahol B a zajsávszélesség. Átrendezve a következőt kapjuk:

$$P_{ki} = GP_{jbe} + GBk(T + P_z/GBk) \quad (10.13)$$

Láthatóan, átviteli rendszerünk hatása úgy vehető figyelembe, mintha megnövekedett volna a bemeneti zajhőmérséklet az ún. bemenetre redukált zajhőmérséklettel:

$$P_{ki} = GP_{jbe} + GBk(T + T_{red}) = GP_{jbe} + GP_{zbe} + GBkT_{red} \quad (10.14)$$

Az átviteli rendszer bemenetre redukált zajhőmérséklete az átviteli blokk fontos paramétere, és egyértelműen jellemzi az átviteli blokkot a zajhozzájárulás szempontjából.

A bemenetre redukált zajhőmérsékleten kívül a zajtényező megadásával is jellemezhetők az átviteli blokkok. Zajtényezőnek nevezzük a kimenő zajteljesítmény és a bemenő zajteljesítmény felerősített értékének az arányát abban az esetben, ha a bemeneti zajforrás hőmérséklete a $T = 290$ K referencia-hőmérséklettel egyenlő. A zajtényező matematikai alakja:

$$F = P_{zki} / GP_{zbe} |_{T_0} \quad (10.15)$$

Mivel a kimenő hasznos jel teljesítménye a bemenő teljesítmény G -szerese, a \surd zajtényező azt is kifejezi, hogy mekkora a jel - zaj-viszony romlása abban az esetben, ha a bemeneten a zaj egy 290 K zajhőmérsékletű forrásból származik. A zajtényezőt a gyakorlatban dB-ben adjuk meg ($10 \lg F$).

Hangsúlyozni kell, hogy a zajtényező meghatározásában szereplő feltétel - a 290 K-es referencia-hőmérséklet - a definíció igen lényeges része, nélküle a zajtényező számértéke nem lenne egyértelmű.

Zaj szempontjából a bemenetre redukált zajhőmérséklet is, a zajtényező is egyértelműen jellemzi az átviteli blokkot. A közöttük lévő átszámítást közvetlenül a (10.15) definícióból határozhatjuk meg:

$$F = P_{zki} / GP_{zbe} |_{T_0} = \{GBk(T_0 + T_{red})/GBkT_0\} = 1 + T_{red} / T_0 \quad (10.16)$$

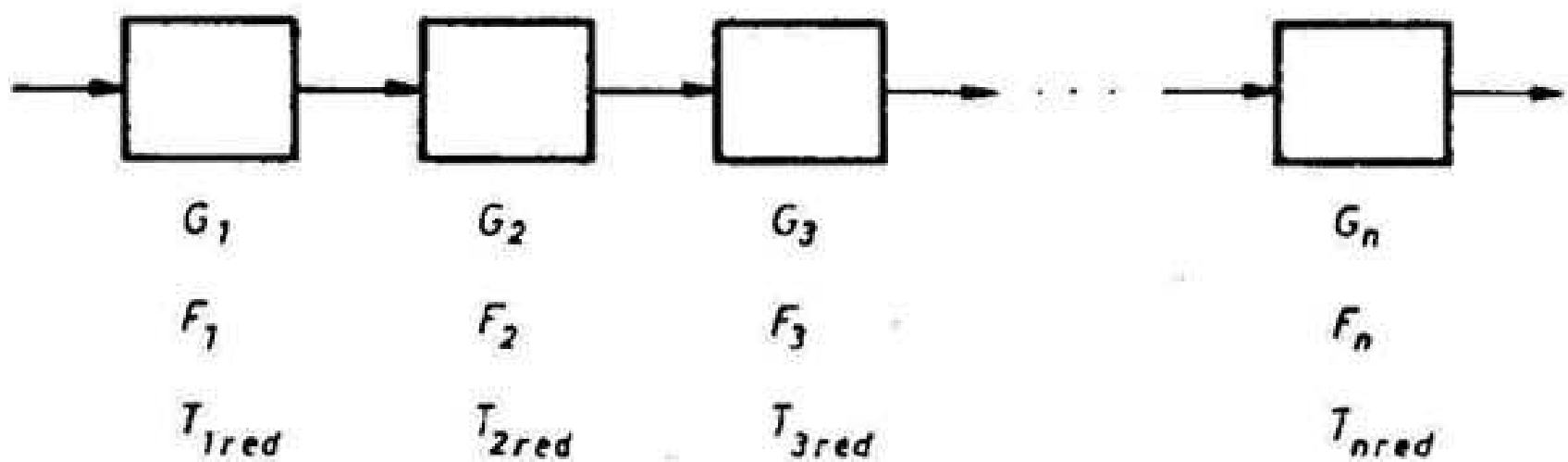
ill. átrendezve:

$$T_{red} = (F-1)T_0 \quad (10.17)$$

10.3. Az eredő zajtényező

Gyakran felvetődik az a kérdés, hogy mekkora több egymás után kapcsolt blokk eredő zajtényezője (és redukált zajhőmérséklete) (10.1. ábra).

10.1. ábra. Összetett rendszer paramétereit



Az eredő erősítés a blokkok erősítésének a szorzata:

$$G_{jbe} = G_1 G_2 G_3 \dots G_n \quad (10.18)$$

Az eredő bemenetre redukált zajhőmérséklet kiszámításához meg kell határozni a kimenő zajteljesítményt. Az áttekinthetőség érdekében először csak két fokozatot tételezünk fel ($n = 2$). Az 1. blokk kimenetén megjelenő zajteljesítmény a (10.14) alapján:

$$P_{1ki} = G_1 P_{zbe} + G_1 B k T_{1red} \quad (10.19)$$

A második fokozat szempontjából az első fokozat kimenő teljesítménye számít bemenő teljesítménynek, így (10.14) ismételt alkalmazásával a kimenő teljesítményre a

$$P_{2ki} = G_2 P_{1ki} + G_2 B k T_{2red} \quad (10.20)$$

összefüggés adódik. Behelyettesítés és átrendezés után:

$$P_{2ki} = G_1 G_2 \{ P_{zbe} + B k \{ T_{1red} + (T_{2red} / G_1) \} \} \quad (10.21)$$

amelyből a (10.14) összefüggés felhasználásával kiolvasható a két fokozatra vonatkozó eredő redukált zajhőmérséklet:

$$T_{\text{red}} = T_{1\text{red}} + (T_{2\text{red}} / G_1) \quad (10.22)$$

Több fokozat esetén a két fokozatra érvényes szabályt kell többször alkalmazni:

$$T_{\text{red}} = T_{1\text{red}} + (T_{2\text{red}} / G_1) + (T_{3\text{red}} / G_1 G_2) + \dots + (T_{n\text{red}} / G_1 G_2 \dots G_{n-1}) \quad (10.23)$$

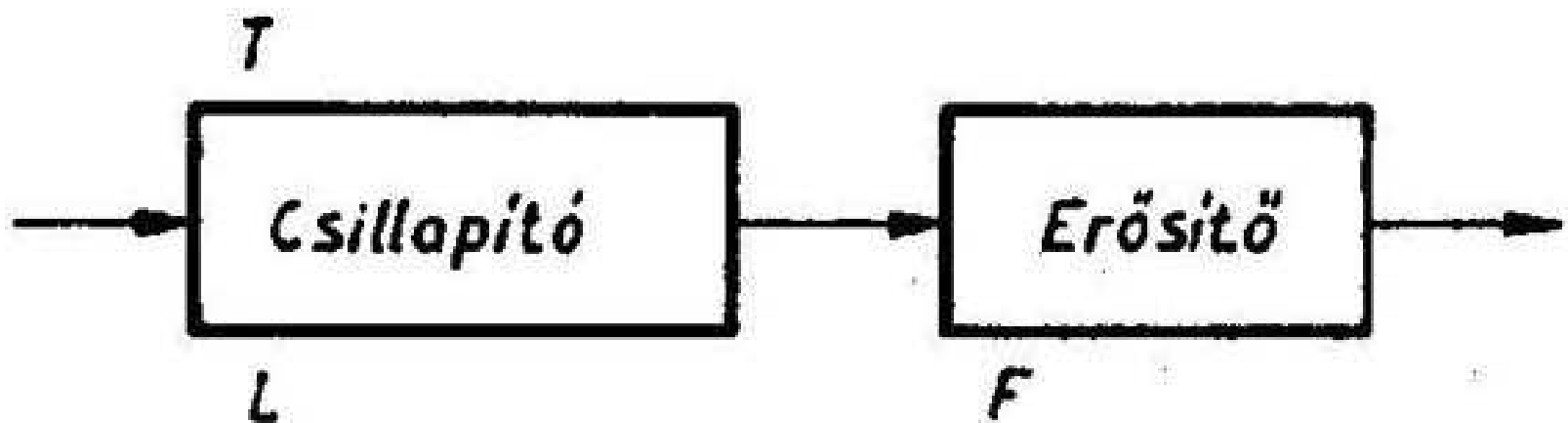
amelyből a zajtényező a (10.16) és a (10.17) átszámítási szabályok alapján adódik:

$$F = F_1 + (F_2 - 1 / G_1) + (F_3 - 1 / G_1 G_2) + \dots + (F_n - 1 / G_1 G_2 \dots G_{n-1}) \quad (10.24)$$

Az eredő redukált zajhőmérséklet és a zajtényező képletéből néhány fontos következtetést közvetlenül levonhatunk. Ha az erősítés kellően nagy, zaj szempontjából az első fokozat dominál, tehát egy rendszer zajra való optimalizálásának a kritikus paramétere az előerősítő zajtényezője.

A bemeneti erősítőfokozat teljesítőképességét nagymértékben leronthatja, ha a jelforrás (pl. antenna) és a bemeneti kábel közé csillapítóblokk (pl. el nem hanyagolható veszteségű összekötő kábel) ékelődik, ahogy a 10.2. ábra mutatja.

10.2. ábra. A csillapító és az erősítő kapcsolódása



Ebben az esetben a két fokozatra érvényes - már tárgyalt - összefüggéseket alkalmazhatjuk, de a csillapító paramétereinek meghatározásához némi megfontolás szükséges. A csillapító, mint rendszerünk első blokkjának az "erősítése":

$$G_1 = 1/L \quad (10.25)$$

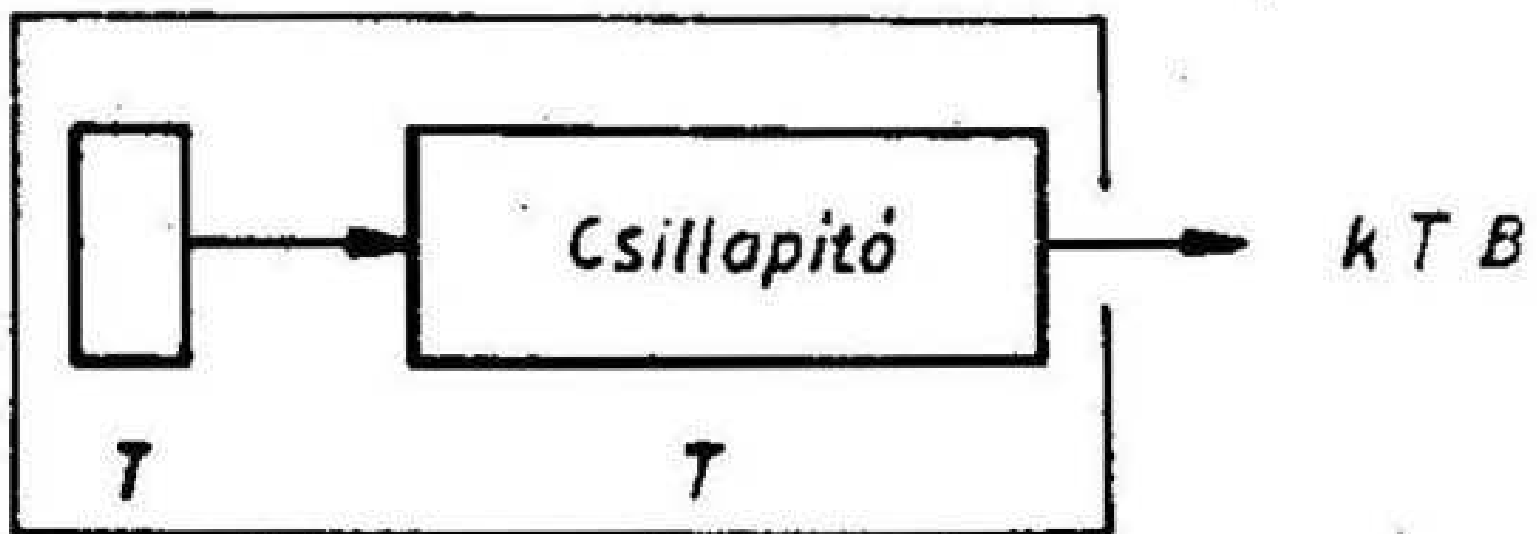
A csillapítóhoz tartozó zajtényezőt (redukált zajhőmérsékletet) a következő megfontolással határozhatjuk meg.

Egészítsük ki képzeletben a csillapítót egy ugyanolyan hőmérsékletű lezárással (10.3. ábra). Az így kapott rendszer hőmérséklete mindenhol T , így alaptételünk szerint a kivehető

zajtelszám a rádiótartományban kTB . Másrészt erre a rendszerre is alkalmazhatjuk a (10.14) kifejezéssel megadott általános szabályt:

$$kTB = (1/L)Bk(T + T_{red}) \quad (10.26)$$

10.3. ábra. Csillapító kiegészítése zajforrássá



Az egyenletet átrendezve a redukált hőmérsékletre vonatkozó kifejezés adódik:

$$T_{red} = T(L-1) \quad (10.27)$$

ill. a csillapító zajtényezőjére a (10.16) alkalmazásával a

$$F_L = 1 + (T / T_0)(L - 1) \quad (10.28)$$

egyenlet. Különösen könnyen áttekinthető eredményeket kapunk, ha a csillapító hőmérséklete a referencia-hőmérséklettel közelíthető. Erre az esetre egyszerű behelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$F_L = L \quad (10.29)$$

tehát a csillapító (kábel) zajtényezője megegyezik a csillapítással (feltéve, hogy a hőmérséklet azonosnak vehető a 290 K referencia-hőmérséklettel), továbbá az eredő zajtényező (10.24) alkalmazásával

$$F_r = LF \quad (10.30)$$

Mivel a szorzás a dB-ben kifejezett jellemzők összeadásával azonos, megállapíthatjuk, hogy a jel csillapítása erősítés előtt annyi dB-lel növeli a zajtényezőt, ahány dB a csillapítás.

Mint láttuk, ha a jelforrás (pl. antenna) zajhőmérséklete megegyezik a referencia-hőmérséklettel, akkor a csillapítás közvetlenül megadja a jel - zaj-viszony romlását. Ha a forrás zajhőmérséklete kicsi, lényegesen nagyobb romlás is bekövetkezhet a jel - zaj-viszonyban (1. a 2. feladatot a fejezet végén).

10.4. Összetett zajforrás ekvivalens zajhőmérséklete

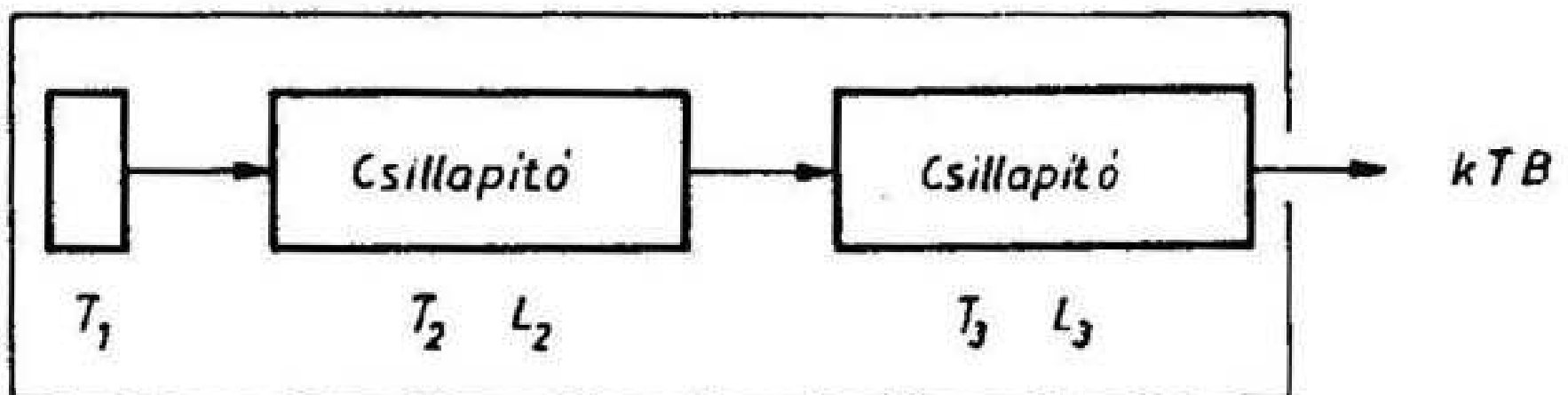
Az eddigiek alapján meg tudjuk határozni egy összetett zajforrás ekvivalens zajhőmérsékletét. A következőkben levezetjük egy zajforrásból és két csillapítóból álló rendszer eredő zajhőmérsékletét abban az általános esetben, ha mindegyik építőelem más hőmérsékletű. A vizsgált elrendezést a 10.4. ábra mutatja.

Első lépésként határozzuk meg az első két elemből álló rendszer eredő zajhőmérsékletét (10.5. ábra).

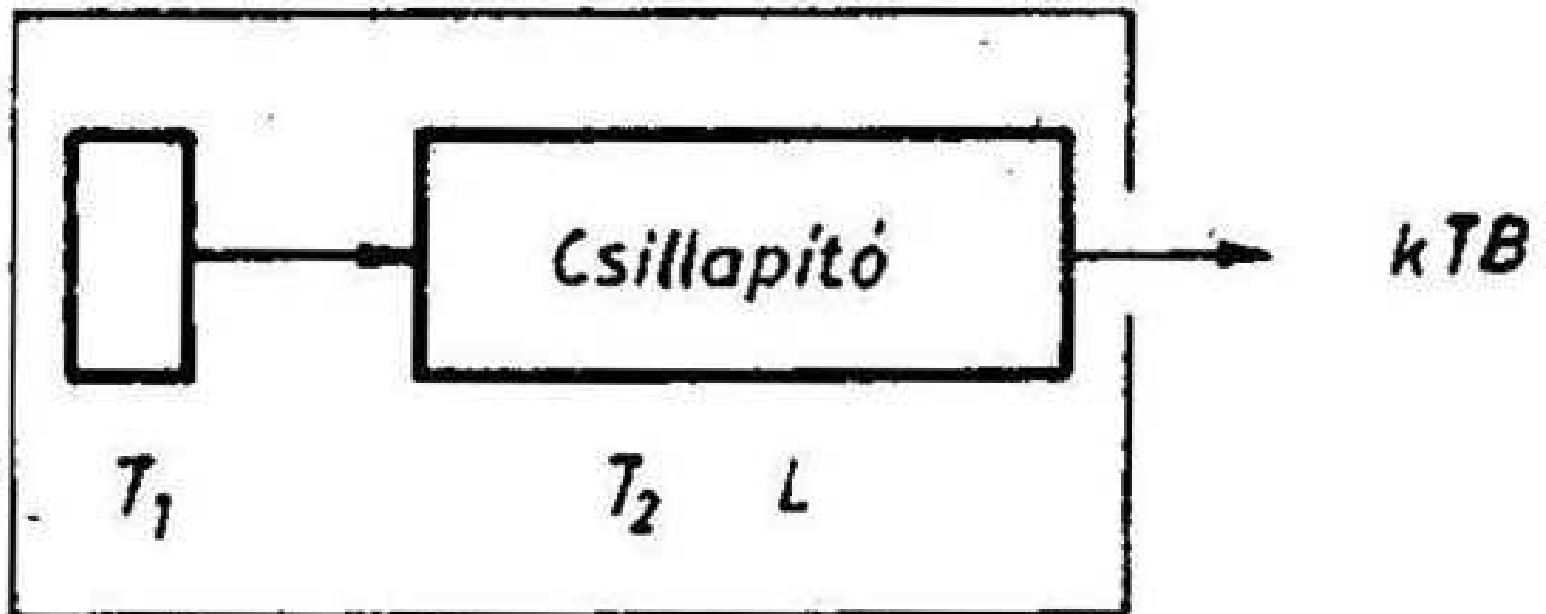
A csillapító bemenetre redukált hőmérséklete a (10.27) összefüggés alapján $T(L-1)$, a hozzá tartozó "erősítés" pedig $1/L$, így a kimenő zajteljesítmény:

$$P_{zki} = (1/L)G_1G_2 \{ P_{zbe} + Bk \{ T_{1red} + (T_{2red} / G_1) \} \} \quad (10.31)$$

10.4. ábra. Összetett zajforrás két csillapítóval



10.5. ábra. Összetett zajforrás



Ebből az eredő zajhőmérséklet:

$$T = (1/L) T_1 + \{1 - (1/L)\} T_2 \quad (10.32)$$

Az előző eredményt alkalmazhatjuk ismételten a két csillapítót tartalmazó elrendezésre is, így a teljes rendszer zajhőmérsékletére a következő eredmény adódik:

$$T = (1/L_2)(1/L_3) T_1 + \{1 - (1/L_2)\}(1/L_3) T_2 + \{1 - (1/L_2)\} T_3 \quad (10.33)$$

A továbbiak szempontjából lényeges, hogy értelmezzük az eredményt fizikai szemlélettel is. Elég a középső blokkra szorítkozni, mivel az általános helyzetű, követi is és meg is előzi egy-egy blokk. Láthatjuk, hogy az eredő kialakítása szempontjából a középső blokk hatása egyrészt lecsökken amiatt, hogy az általa termelt zajt a következő blokk csillapítja ($1/L$ tényező), másrészt a termelt zaj arányos a blokkon belüli disszipációt kifejező $1 - 1/L$ tényezővel. Fontos tudnunk, hogy a disszipációtól mentes "átlátszó" blokknak nincs szerepe az eredő zaj kialakításában, csak a veszteséges elemeknél keletkezik zaj.

Már említettük, hogy ha a rendszer hőmérséklete mindenhol azonos, akkor a kivehető zaj nagysága szempontjából közömbös a rendszer konkrét felépítése, a kivehető teljesítmény mindig a (10.1) összefüggéssel adható meg. Ezt az összefüggést mind ez ideig vezetett hullámú építőelemekre alkalmaztuk, de általános jellege miatt érvényes a sugárzó elemeket tartalmazó rendszerekben is. Így, ha egy antenna kimenetén mérjük a kivehető zajteljesítményt, az szintén a (10.1) összefüggésnek megfelelően alakul, ill. a rádiótartományban az egyszerűsített (10.2) kifejezés használható.

Természetesen a zajt nem az antenna hozza létre, hiszen láttuk, hogy a veszteségmentes elemek nem járulnak hozzá a rendszer zajtényezőjéhez. Az antenna kapocspárján mérhető zaj fizikai oka az, hogy az antenna sugárzási terében lévő zajforrások által kisugárzott jeleket az antenna (a megfelelő irányban értelmezett nyereségével súlyozva) veszi. Ha az antennától különböző irányban elhelyezkedő zajforrások hőmérséklete különböző, a súlyozott átlag a következőképpen számítható:

$$T_a = (1/4\pi) \iint_{(4\pi)} T(\varphi, \nu) G_a(\varphi, \nu) d\Omega \quad (10.34)$$

ahol T az antenna zajhőmérséklete, $G(\varphi, \nu)$ az antenna irányfüggő (izotrop antennára vonatkoztatott) nyeresége, $d\Omega$ az infinitezimális térszögtartomány. Az integrálást az egész 4π térszögtartományra ki kell terjeszteni.

Tovább bonyolítja a helyzetet, hogy a hullámterjedés közegében lejátszódó elektromos jelenségek járulékos (egyres esetekben lényeges nagyságú) zajnövekedést okoznak. A Föld felszínén elhelyezkedő antenna zajhőmérsékletét a következő zajösszetevők alakítják ki:

- kozmikus háttérzaj: 2,78 K, fizikai eredete ismeretlen, az ősrobbanás kozmológiai elmélete szerint a kezdeti forró univerzum sugárzási maradványával azonosítható;
- galaktikus zaj: saját galaxisunk rádiósugárzása;
- troposferikus zaj: a légkör által okozott rádiózaj;
- a földfelszín által okozott zaj;
- közeli égitestek által okozott zaj (Nap, Hold);
- az antenna veszteségei miatt keletkező zaj.

10.5. Rádió-összeköttetés jel-zaj mérlege

A hírközlési, műsorszóró, rádiócsillagászati, rádiólokációs és rádiónavigációs rendszerekben egyaránt fontos szerepet játszik a zaj mint korlátozó tényező. A hasznos jelhez tartozó teljesítmény és a zajteljesítmény aránya - a jel - zaj-viszony - a rendszerek alapvető minőségi jellemzője.

Következő vizsgálatunkban az ún. RF jel - zaj-viszonyra szorítkozunk, a demodulálás során keletkező nyereséget (vagy veszteséget) nem vesszük számításba. Adottnak tekintjük a következő jellemzőket: P az adó teljesítménye, G az adóantenna nyeresége, G a vevőantenna nyeresége, r az adó és a vevő távolsága, T a vevőrendszer eredő zajhőmérséklete, L a járulékos csillapítás, B a zajsáv szélesség, λ az adás hullámhossza.

A 9. fejezetben, a rádiócsatorna leírásakor foglalkoztunk a vételi teljesítmény meghatározásával. Az ottani eredmények alkalmazásával a

$$P_R / P_T = (G_R G_T \lambda^2) / (16\pi^2 r^2 L) \quad (10.35)$$

egyenlet adódik. Mivel a bemenetre redukált zajhoz tartozó teljesítmény a

$$P_R = kTB \quad (10.36)$$

kifejezéssel adható meg, az RF jel - zaj-viszonyra a következő egyenletet kapjuk:

$$S/N = P_R / P_z = \{(P_T G_T \lambda^2 G_R) / (16\pi^2 r^2 L k B)\} (G_R / T) \quad (10.37)$$

Látható, hogy ha a többi mennyiség rögzített, akkor az elérhető jel - zaj-viszony egyenesen arányos a G/T paraméterrel, amely a vevőállomások egyik alapvető jellemzője.

10.6. Kvantáltságból adódó zajjelenségek

Fizikailag az információközlés sohasem folyamatos, hanem elemi kvantumok (elektronok, ill. fotonok) áramlása révén valósul meg. Ha a jelet az elektromos áram hordozza, akkor a legkisebb átvihető töltés az elektronok töltése, nagyfrekvenciás sugárzás esetében pedig a legkisebb átvihető energia hf .

A klasszikus híradástechnikában az előző pontokban részletesen tárgyalt termikus fehérzaj játszotta a legfontosabb szerepet az érzékenységet korlátozó tényezők között. Napjaink híradástechnikája - a csak hullámtulajdonságot mutató rádiótartományon kívül - felhasználja a mintegy öt nagyságrenddel nagyobb frekvenciájú, már kvantumos jelleggel rendelkező optikai sávot is. Persze az elektromágneses mező éppen úgy nem tekinthető korlátlanul osztható, folytonosan hullámzó hullámtérnek, mint ahogy kis, tömör részecskék záporának sem, mindkét modell az elektromágneses jelenségnek csak egyik vagy másik tulajdonságát adja vissza (többé - kevésbé).

Ha az információt hordozó fizikai folyamat kvantált, a véletlenül múlik, hogy egy kiválasztott időtartományban hány elemi egységet figyelhetünk meg, a jel elméleti értéke csak az elemi egységek darabszámához tartozó várható értéket rögzíti. A ténylegesen regisztrálható darabszám véletlenszerűen ingadozik a várható érték körül, eloszlását a Poisson-eloszlással írhatjuk le.

Az elemi egységek beérkezésének statisztikus ingadozása a híradástechnikai rendszer szempontjából zajként jelenik meg. Az eddig elmondottak szempontjából közömbös, hogy az elemi egységet elektron vagy foton valósítja meg. Amennyiben a fotonok véletlenszerű ingadozása a zaj fizikai alapja, akkor kvantumzajról, ha a töltés kvantált jellege, akkor pedig az áram sörétzajáról beszélünk. A háttérben a fizikai jelenség mindkét esetben azonos, így más szóhasználattal a kvantumzajt a fotonokhoz tartozó sörétzajnak is nevezhetjük. A sörétzajra az

$$i^2 = 2BqI_0 \quad (10.38)$$

összefüggés vezethető le, ahol I az áram várható értéke.

A kvantumzaj vizsgálata szempontjából tételezzük fel, hogy a fényforrás jelét ideális detektorral érzékeljük. Az ideális detektorban minden foton egy elektront hoz létre, így a P teljesítményű jelhez tartozó áram:

$$I_0 = (Pq) / (hf) \quad (10.39)$$

A jel-zaj-viszonyt ebben az esetben úgy értelmezhetjük, hogy a jel arányos a várható érték négyzetével, a zaj pedig az ingadozáshoz tartozó szórásnégyzettel, tehát

$$S/N = I_0^2 / i^2 = P/(2Bhf) \quad (10.40)$$

A 11. fejezetben, a moduláció elméletének tárgyalásakor bizonyítani fogjuk, hogy az $\sqrt{}$ alapsávi B sávszélesség ekvivalens a vivőfrekvencia körül értelmezett $2B$ sávszélességgel, így a (10.40) egyenletet formálisan úgy értelmezhetjük, mintha a kvantumzaj teljesítménysűrűsége

$$S(f) = hf \quad (10.41)$$

lenne, azaz megegyezne a foton energiájával.

Bár az előző levezetésnél megalapozottabban is indokolható a (10.41) összefüggés, nem szabad elfelejtenünk, hogy a kvantumzaj és a termikus zaj között fizikai szempontból lényeges különbség van (a termikus zaj akkor is jelen van, ha a jelet kikapcsoljuk, míg a kvantumzaj a jelet hordozó jelenség "szemcsés" szerkezete miatt jön létre), ezért annak állandó teljesítménysűrűségű zajjal való helyettesítése csak közelítő jellegű.