1. feladat (13 pont)

a) Ismertesse a hatványsorok konvergenciasugarát megadó „gyökkritérium" limeszes alakját!

b) Határozza meg a következő hatványsor konvergenciasugarát!

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{n^2}x^n$$

a,

$\boxed{4}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$; Ha $\exists\, \alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, akkor

$$R = \begin{cases} 1/\alpha, & \text{ha } \alpha > 0 \\ 0, & \text{ha } \alpha = \infty \\ \infty, & \text{ha } \alpha = 0. \end{cases}$$

b,

$\boxed{9}$ $a_n = \left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{n^2}$; $\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^n$ 3 $= \frac{\left(1+\frac{3}{2n}\right)^n}{\left(1+\frac{5}{2n}\right)^n}$ 3 $\xrightarrow{n\to\infty} \frac{e^{3/2}}{e^{5/2}}$ 2 $= \frac{1}{e}$

$\underline{\underline{R = e}}$ 1

2. feladat (15 pont)

Határozza meg a következő hatványsor konvergenciasugarát és összegét!

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n+1}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n+1} = x\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}x^n \;\text{ 2 }\; = x\sum_{n=3}^{\infty}\left(\int_{t=0}^{x} t^{n-1}\,dt\right) \;\text{ 2 }\; =$$

$$= x\int_{t=0}^{x}\left(\sum_{n=3}^{\infty} t^{n-1}\right)dt \;\text{ 2 }\; = x\underset{\substack{\text{ha } |t|<1 \\ \text{azaz ha } |x|<1}}{\int_{t=0}^{x}} \frac{t^2}{1-t}\,dt \;\text{ 2 }\; =$$

$$= x\int_{t=0}^{x}\frac{(t+1)(t-1)+1}{1-t}\,dt = -x\int_{t=0}^{x}(t+1)\,dt + x\int_{t=0}^{x}\frac{1}{1-t}\,dt =$$

$$= -x\left(\frac{x^2}{2}+x\right) - x\Big[\ln(1-t)\Big]_{t=0}^{x} = \underline{\underline{-x\left(\frac{x^2}{2}+x+\ln(1-x)\right)}} \;\text{ 5 }$$

$R = 1$ 2 ha $|x| < 1$

3. feladat (12 pont)

Adja meg a következő függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát, és határozza meg a Taylor-sor konvergenciatartományát!

$$f(x) = \frac{8x^3}{1+2x^2}$$

$$f(x) = \frac{8x^3}{1+2x^2} = 8x^3 \cdot \frac{1}{1-(-2x^2)} \overset{④}{=} 8x^3 \sum_{n=0}^{\infty} (-2x^2)^n \overset{④}{=}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{n+3} x^{2n+3}$$

Ha $|-2x^2| < 1$, azaz ha $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (geometriai sor)

$R = \frac{1}{\sqrt{2}}$, K.T.: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ④

4. feladat (15 pont)

Határozza meg az

$$f(x) = \sqrt[5]{32+x}$$

függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát! Mennyi a sor konvergenciasugara? A harmadrendű Taylor-polinommal közelítve adja meg $\sqrt[5]{33}$ közelítő értékét elemi műveletekkel kifejezve!

$$f(x) = (32+x)^{1/5} = 2\cdot\left(1+\frac{x}{32}\right)^{1/5} \overset{③}{=} 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/5}{n}\left(\frac{x}{32}\right)^n \overset{④}{=}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/5}{n} \frac{2}{32^n} x^n$$

Binomiális sor. $\left|\frac{x}{32}\right| < 1 \Rightarrow |x| < 32$

azaz $R = 32$ ③

$x = 1$ esetén:

$$f(1) = \sqrt[5]{33} \approx \underbrace{\binom{1/5}{0}}_{1}\cdot 2 + \underbrace{\binom{1/5}{1}}_{1/5}\frac{1}{16} + \underbrace{\binom{1/5}{2}}_{\frac{1/5\cdot(-4/5)}{2}}\frac{2}{32^2} + \underbrace{\binom{1/5}{3}}_{\frac{1/5\cdot(-4/5)(-9/5)}{3!}}\frac{2}{32^3}$$ ⑤

5. feladat (12 pont) $\boxed{-5-}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{2x^2+5y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0;0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0;0)\end{cases}$$

Létezik-e az f függvény határértéke az origóban? Ha igen, adja meg értékét! Hol van szakadása az f függvénynek?

Legyen $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ ②

$$f(x,y)=\frac{\rho^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{2\rho^2\cos^2\varphi+5\rho^2\sin^2\varphi}=\rho\frac{\cos^2\varphi\sin\varphi}{2\cos^2\varphi+5\sin^2\varphi}=\rho\frac{\cos^2\varphi\sin\varphi}{5-3\cos^2\varphi}$$ ③

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{\rho\to0}\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\rho}\underbrace{\frac{\cos^2\varphi\sin\varphi}{5-3\cos^2\varphi}}_{g(\varphi)}=0$$ ②, mert $g(\varphi)$ korlátos:

$$|g(\varphi)|\leq\frac{1\cdot1}{5-3}=\frac{1}{2}$$ ③

Ha $(x,y)\neq(0,0)$, akkor f folytonos, mert folyt. függvények hányadosa, és a nevező nem 0. $(x,y)=(0,0)$ esetén láttuk, hogy $f(x,y)\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)}0=f(0,0)$, tehát f mindenütt ($\mathbb{R}^2$-en) folytonos. ②

6. feladat (18 pont)

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a) Folytonos-e f az origóban?

b) Határozza meg $f(x,y)$ parciális deriváltjait! (Az origóban a definícióval dolgozzon!)

c) Mely pontokban létezik és hol nem létezik f totális deriváltja? (Válaszát indokolja.)

a, $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ ②

$\boxed{5}$ $$f(x,y)=\frac{3\rho^2\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}=3\sin\varphi\cos\varphi$$ függ φ-től, tehát

$\nexists\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$, így f nem folytonos az origóban. ③

b, Ha $(x,y)\neq(0,0)$, akkor

$\boxed{8}$ $$f'_x(x,y)=\frac{3y(x^2+y^2)-3xy\cdot2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-3x^2y+3y^3}{(x^2+y^2)^2}$$ ③

$$f'_y(x,y)=\frac{3x(x^2+y^2)-3xy\cdot2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-3xy^2+3x^3}{(x^2+y^2)^2}$$ ②

Ha $(x,y)=(0,0)$, akkor

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0 \qquad (2)$$

Hasonlóan $f'_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$ (1)

$\boxed{5}$ c, Az $(x,y)\neq(0,0)$ pontokban létezik f totális deriváltja, mert ezen pontok alkalmas környezetében a parciális deriváltak léteznek és folytonosak. (3)

A $(0,0)$-ban nem deriválható totálisan, mert nem folytonos. (2)

7. feladat (15 pont)

$$f(x,y)=\frac{5x-3y}{2x+4y}, \qquad (x_0,y_0)=(3,-1)$$

a) Határozza meg az f függvénynek a $\mathbf{v}=(2,1)$ vektorral párhuzamos iránymenti deriváltját az (x_0,y_0) pontban!

b) Milyen irányban maximális az f függvény (x_0,y_0) pontban vett iránymenti deriváltja? Mennyi az iránymenti derivált maximális értéke?

c) $df\big((x_0,y_0),(h,k)\big)=?$

$\boxed{10}$ a, Ha $(2x+4y)\neq 0$,

$$f'_x(x,y)=\frac{5(\cancel{2x}+4y)-(\cancel{5x}-3y)\cdot 2}{(2x+4y)^2}=\frac{26y}{(2x+4y)^2}; \quad (2) \qquad f'_x(3,-1)=\frac{-26}{4}=\frac{-13}{2} \quad (1)$$

$$f'_y(x,y)=\frac{-3(2x+\cancel{4y})-(5x-\cancel{3y})\cdot 4}{(2x+4y)^2}=\frac{-26x}{(2x+4y)^2}; \quad (2) \qquad f'_y(3,-1)=\frac{-3\cdot 26}{2^2}=\frac{-39}{2} \quad (1)$$

$$\|\underline{v}\|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}; \quad \underline{e}=\frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\left.\frac{df}{de}\right|_{(x_0,y_0)}=\operatorname{grad} f(x_0,y_0)\cdot\underline{e}=\frac{1}{\sqrt5}\left(2\cdot\frac{-13}{2}+1\cdot\frac{-39}{2}\right)=\frac{-65}{2\sqrt5} \quad (2)$$

$\boxed{3}$ b, $\left.\frac{df}{de}\right|_{(x_0,y_0)}$ maximális, ha $\underline{e}\parallel \operatorname{grad} f(x_0,y_0)=\begin{bmatrix}-13/2\\-39/2\end{bmatrix}$ (3)

$$\left(\frac{df(x_0,y_0)}{de}\right)_{max}=\|\operatorname{grad} f(x_0,y_0)\|=\sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2+\left(\frac{39}{2}\right)^2}=\frac12\sqrt{13^2+39^2}$$

$\boxed{2}$ c, $df\big((x_0,y_0),(h,k)\big)=f'_x(x_0,y_0)\cdot h+f'_y(x_0,y_0)\cdot k=-\frac{13}{2}h-\frac{39}{2}k$ (2)

Pótfeladatok. A következő feladatokat csak az elégséges szint (40%) eléréséhez javítjuk ki.

8. feladat (10 pont)

Ismert Taylor-sorok segítségével határozza meg a következő numerikus sorok összegét!

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{n!} = ? \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n)!} = ?$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{n!} = 2^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = \underline{\underline{8 \cdot e^2}} \quad 4$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n}}{(2n)!} - \frac{(-4)^1}{2!} - \frac{(-4)^0}{0!} = \cos(2) + 2 - 1 =$$

$$= \underline{\underline{\cos(2) + 1}} \quad 6$$

9. feladat (10 pont)

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény, és $g(x, y) = \sin(x^2 + y)$. Adja meg a $h(x, y) = f(t)|_{t=g(x,y)} = f\big(g(x, y)\big)$ függvény összes másodrendű parciális deriváltját!

2 $h'_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(\sin(x^2+y)) = f'(\sin(x^2+y)) \cdot 2x \cos(x^2+y)$

2 $h'_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(\sin(x^2+y)) = f'(\sin(x^2+y)) \cdot \cos(x^2+y)$

2 $h''_{xx}(x,y) = f''(\sin(x^2+y)) \cdot 4x^2 \cos^2(x^2+y) + 2 f'(\sin(x^2+y)) \cos(x^2+y$
$+ f'(\sin(x^2+y)) \cdot 4x^2 \cdot (-\sin(x^2+y))$

2 $h''_{yy}(x,y) = f''(\sin(x^2+y)) \cdot \cos^2(x^2+y) + f'(\sin(x^2+y)) \cdot (-\sin(x^2+$

2 $h''_{xy}(x,y) = h''_{y,x}(x,y) = f''(\sin(x^2+y)) \cdot 2x \cos^2(x^2+y) +$
$+ f'(\sin(x^2+y)) \cdot 2x \cdot (-\sin(x^2+y$