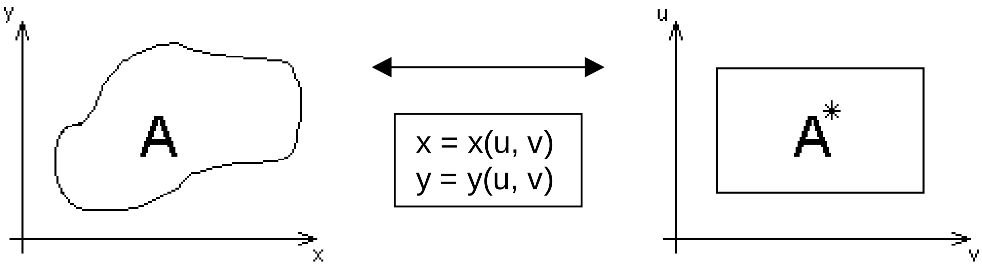
Kettõs integrál transzformációja

$(x, y) \to (u, v)$



$\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = J$: Jacobi-féle függvénydetermináns

Ha egy hely környezetében $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$, akkor létezik az x = x(u, v); y = y(u, v) függvényrendszer inverze: u = u(x, y); v = v(x, y) függvényrendszer, mely az adott leképzés inverz leképzését határozza meg. Ez esetben a leképzés az adott hely környezetében kölcsönösen egyértelmû és így megfordítható.
Fennáll a

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1$$

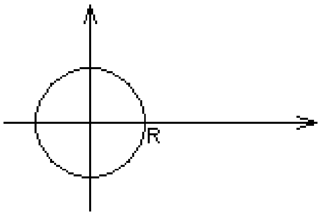
összefüggés is.

Ha x = x(u, v); y = y(u, v) függvényrendszer kölcsönösen egyértelmû és megfordítható módon képzi le A*-ot A-ra:

$$\iint_A 1\, dxdy = \iint_{A^*} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv$$

$$\iint_A f(x, y)\, dxdy = \iint_{A^*} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv$$

Polártranszformáció

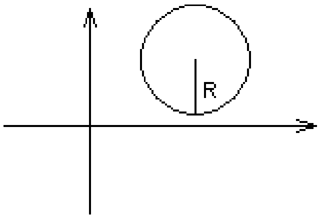


$x = r\cos\varphi \qquad 0 \le r \le R \qquad J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$

$y = r\sin\varphi \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$|J| = r$

Általános helyzetû kör:



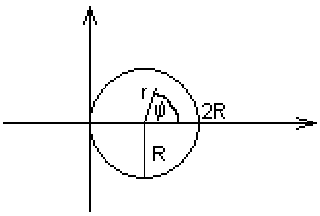
$$x = x_0 + r\cos\varphi \qquad 0 \le r \le R$$
$$y = y_0 + r\sin\varphi \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$$
$$|J| = r$$

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le R^2$

Ennek speciális esete:

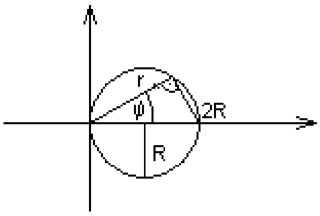
$x^2 - 2Rx + y^2 \le 0$

a)



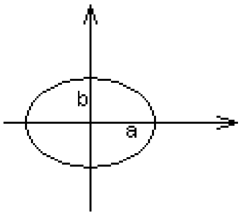
$$x = R + r\cos\varphi \qquad 0 \le r \le R$$
$$y = r\sin\varphi \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$$
$$|J| = r$$

b)



$$x = r\cos\varphi \qquad 0 \le r \le 2R\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi \qquad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$
$$|J| = r$$

<u>Általános polártranszformáció</u>



$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$

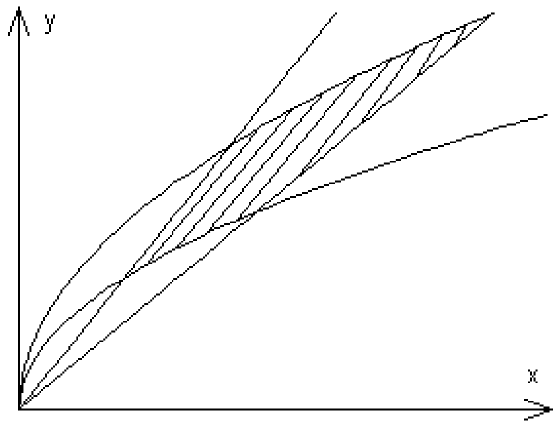
$$x = ar\cos\varphi \qquad 0 \le r \le 1 \qquad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right)$$
$$y = br\sin\varphi \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$$
$$|J| = abr$$

Speciális transzformációk:

Pl. $\iint_A \frac{1}{x} dA = ?$ A korlátos tartomány határai: $y^2 = 2x;\ y^2 = x;\ y = x;\ y = \frac{2}{3}x$

$$1 \le u := \frac{y^2}{x} \le 2$$

$$\frac{2}{3} \le v := \frac{y}{x} \le 1$$



$$\left.\begin{matrix} u = \frac{y^2}{x} \\ v = \frac{y}{x} \end{matrix}\right\} \quad u = v \cdot y \rightarrow \quad \begin{matrix} y = \frac{u}{v} \\ x = \frac{u}{v^2} \end{matrix}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{v^2} & \frac{-2u}{v^3} \\ \frac{1}{v} & \frac{-u}{v^2} \end{vmatrix} = \frac{-u}{v^4} + \frac{2u}{v^4} = \frac{u}{v^4} > 0$$

$$\iint_T \frac{1}{x} dxdy = \int_{\frac{2}{3}}^{1}\int_{1}^{2} \frac{v^2}{u}\frac{u}{v^4} dudv = \int_{\frac{2}{3}}^{1} \frac{1}{v^2} u\Big|_1^2 dv = -\frac{1}{v}\Big|_{\frac{2}{3}}^{1} = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Pl.

$\iint_A f\, dA = ?$ $\quad A: x^2 - 4xy + y^2 \le 0;\ y \ge 0$

a) $f(x,y) = y(x^2 + y^2)^3$

b) $f(x,y) = y(x^2 - 4x + y^2)^5$

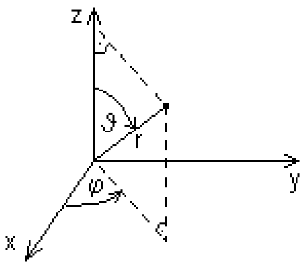
Hármas integrál transzformációja

$$(x, y, z) \rightarrow (u, v, w)$$

$$V \quad \begin{matrix} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{matrix} \quad V* \qquad J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} grad\ x \\ grad\ y \\ grad\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_{uw} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint_{v*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \cdot |J|\, dudvdw}$$

Gömbi koordináták



$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi \qquad 0 \le r \le R$$
$$x = r \sin\vartheta \sin\varphi \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$$
$$z = r \cos\vartheta \qquad 0 \le \vartheta \le \pi$$
$$|J| = r^2 \sin\vartheta$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$J = \begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{vmatrix}$$

$$J = \cos\vartheta \begin{vmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \end{vmatrix} + r\sin\vartheta \begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$J = \cos\vartheta(r^2\cos\vartheta\sin\varphi\cos^2\varphi + r^2\cos\vartheta\sin\varphi\sin^2\varphi) + r\sin\vartheta(r\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + r\sin^2\vartheta\sin^2\varphi)$$
$$J = r^2\sin\vartheta(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) = r\sin\vartheta$$

Általánosított gömbi koordináták

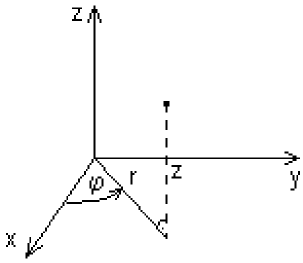
$$x = ar\sin\vartheta\cos\varphi \qquad 0 \le r \le R \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2 \le 1 \quad (ellipszoid)$$
$$y = br\sin\vartheta\sin\varphi \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi \qquad |J| = abcr^2 \sin\vartheta$$
$$z = cr\cos\vartheta \qquad 0 \le \vartheta \le \pi$$

<u>Hengerkoordináták</u> (N_{xy} esetén, ha A_{xy} kör vagy annak egy része)

$$(x, y, z) \to (r, \varphi, z)$$

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = z$$
$$|J| = r$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$



z szerinti kiintegrálás + polártranszformáció