1. feladat (6+12=18 pont)
a) Mit tudunk konvergens sorozatok reciprokának konvergenciájáról, illetve határértékéről? (Térjen ki arra az esetre is, ha az eredeti sorozat zérushoz tart!)
b) Számolja ki a következő sorozatok hatrértékeit, amennyiben léteznek!

$$a_n = \sqrt{n^3 - 4n - 2} - \sqrt{n^3 - 3n + 5}, \qquad b_n = \frac{1}{\sqrt{n^3 - 4n - 2} - \sqrt{n^3 - 3n + 5}}$$

Mo. *a*) Ha $a_n \neq 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, akkor $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)$ konvergens, és $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{A}$ **(3p)** . Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, és $a_n > 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \infty$, ha pedig $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, és $a_n < 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = -\infty$ **(3p)** .

b) $a_n \overset{(\mathbf{2p})}{=} \dfrac{n^3 - 4n - 2 - (n^3 - 3n + 5)}{\sqrt{n^3 - 4n - 2} + \sqrt{n^3 - 3n + 5}} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \dfrac{-n - 7}{\sqrt{n^3 - 4n - 2} + \sqrt{n^3 - 3n + 5}} \overset{(\mathbf{2p})}{=}$

$$= \frac{n}{n^{3/2}} \cdot \frac{-1 - \frac{7}{n}}{\sqrt{1 - \frac{4}{n^2} - \frac{2}{n^3}} + \sqrt{1 - \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^3}}} \overset{(\mathbf{2p})}{\to} 0.$$

Másrészt $\sqrt{n^3 - 4n - 2} < \sqrt{n^3 - 3n + 5}$, tehát $a_n < 0$ **(1p)** , és $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ **(1p)** , így $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ **(2p)** .

---

2. feladat (4+8=12 pont)
a) Állítsa sorrendbe az alábbi nagyságrendeket: $n^k (k > 0), n!, \ln n, n^n, a^n (a > 1)$.
b) Határozza meg az $a_n = \dfrac{n! + (-1)^n \ln n}{n^9 + (-3)^n}$ sorozat torlódási pontjait, limesz szuperiorját, illetve limesz inferiorját!

Mo. *a*) $\ln n \ll n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n$ **(4p)**
b) Páros n esetén

$$a_n = \frac{n! + \ln n}{n^9 + 3^n} = \frac{n!}{3^n} \cdot \frac{1 + \frac{\ln n}{n!}}{\frac{n^9}{3^n} + 1} \to \infty \qquad \textbf{(3p)}$$

Páratlan n esetén

$$a_n = \frac{n! - \ln n}{n^9 - 3^n} = \frac{n!}{3^n} \cdot \frac{1 - \frac{\ln n}{n!}}{\frac{n^9}{3^n} - 1} \to -\infty \qquad \textbf{(3p)}$$

vagyis $\liminf a_n = -\infty$, $\limsup a_n = \infty$ **(2p)** .

---

3. feladat (4+12=16 pont)
a) Ismertesse a L'Hospital-szabályt!
b) Számolja ki a $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\cos(x^2-9)-\operatorname{ch}(x^2-3x)}{(2x-6)\sin(x-3)}$ határértéket!

Mo. *a*) Ha f és g differenciálható x_0 egy kipontozott környezetében, és $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, vagy $\left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right| = \infty$, akkor $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, amennyiben a jobb oldali határérték létezik. **(4p)**
b) A számláló és a nevező határértéke egyaránt 0, így alkalmazható a l'Hospital-szabály. **(2p)**

$$\lim_{x\to 3} \frac{\cos(x^2-9)-\operatorname{ch}(x^2-3x)}{(2x-6)\sin(x-3)} \overset{\textbf{(3p)}}{=} \lim_{x\to 3} \frac{-2x\sin(x^2-9)-(2x-3)\operatorname{sh}(x^2-3x)}{2\sin(x-3)+(2x-6)\cos(x-3)} \overset{\textbf{(5p)}}{=}$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{-2\sin(x^2-9)-4x^2\cos(x^2-9)-2\operatorname{sh}(x^2-3x)-(2x-3)^2\operatorname{ch}(x^2-3x)}{4\cos(x-3)-(2x-6)\sin(x-3)} \overset{\textbf{(2p)}}{=} \frac{-45}{4}$$

---

4. feladat (4+14=18 pont)
a) Adjon elégséges feltételt arra, hogy egy (a,b) intervallumon differenciálható függvénynek az $x_0 \in (a,b)$ pontan lokális szélsőértékhelye van!
b) $f(x) = 2x - \arcsin(x+3)$
Határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, melyeken az f függvény monoton! Hol és milyen típusú lokális szélsőértékhelyei vannak a függvénynek?

Mo. *a*) $f'(x_0)=0$, és f' az x_0 pontban előjelet vált, vagy $f''(x_0)\neq 0$ **(4p)** .
b) $D_f = [-4,-2]$ **(2p)** , és $f'(x) = 2 - \dfrac{1}{\sqrt{1-(x+3)^2}} = 0$ **(2p)** ha $(x+3)^2 = \dfrac{3}{4}$ **(2p)** , vagyis ha $x = -3-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ vagy $x = -3+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **(2p)** , a f' pedig két érték között pozitív, az értelmezési tartomány többi pontjában pedig negatív **(2p)** , így a függvény a $\left(-4,-3-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ és a $\left(-3+\dfrac{\sqrt{3}}{2},-2\right)$ intervallumon monoton fogy **(1p)** , a $\left(-3-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-3+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ intervallumon monoton nő **(1p)** , az $x=-3-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ pontban lokális minimuma **(1p)** , az $x=-3+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ pontban pedig lokális maximuma **(1p)** van.

---

5. feladat (10 pont)*

A $2\sin t = x$ helyettesítést alkalmazva határozza meg az $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}$ függvény primitív függvényét!

Mo. $\dfrac{dx}{dt} = 2\cos t$, $\sqrt{4-x^2} = 2\cos t$ **(2p)**

$$\int f(x)\,dx \overset{\textbf{(2p)}}{=} \int \frac{2\cos t}{4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt \overset{\textbf{(2p)}}{=} \int \frac{1}{\sin^2 t} - 1\,dt \overset{\textbf{(2p)}}{=} -\operatorname{ctg} t - t + c \overset{\textbf{(2p)}}{=}$$
$$= -\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) - \arcsin\frac{x}{2} + c$$

---

6. feladat (2+9=11 pont)*

a) Ismertesse a parciális integrálás módszerét!

b) Számolja ki az $\displaystyle\int (3x+2)\operatorname{arctg} x\,dx$ integrált!

Mo. a) $\displaystyle\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$, **(2p)**

$$\int (3x+2)\operatorname{arctg} x\,dx \overset{\textbf{(3p)}}{=} \left(\frac{3x^2}{2}+2x\right)\operatorname{arctg} x - \int \left(\frac{3x^2}{2}+2x\right)\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx, \text{ ahol}$$

$$\int \left(\frac{3x^2}{2}+2x\right)\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx \overset{\textbf{(3p)}}{=} \frac{3}{2}\int 1-\frac{1}{1+x^2}\,dx + \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx \overset{\textbf{(3p)}}{=} \frac{3}{2}(x-\operatorname{arctg} x)+\ln(1+x^2)+c,$$

így $\displaystyle\int (3x+2)\operatorname{arctg} x\,dx = -\frac{3x}{2} + \left(\frac{3x^2}{2}+2x+\frac{3}{2}\right)\operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2) + c.$

---

7. feladat (10+5=15 pont)*

a) Milyen $\alpha > 0$ esetén konvergens az $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ integrál? Válaszát indokolja!

b) Számolja ki az $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x+2}{(x+1)^2}\,dx$ integrált!

Mo. a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\int_1^\omega \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ **(1p)**

$$\int_1^\omega \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \left[\dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^\omega = \dfrac{\omega^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}, & \text{ha } \alpha \neq 1 \\ [\ln x]_1^\omega = \ln\omega, & \text{ha } \alpha = 1 \end{cases} \qquad \textbf{(4p)}$$

$\lim\limits_{\omega\to\infty} \dfrac{\omega^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \in \mathbb{R}$, ha $\alpha > 1$ **(2p)** , $\lim\limits_{\omega\to\infty} \ln\omega = \infty$ **(1p)** , vagyis az integrál $\alpha > 1$ esetén konvergens **(2p)** .

b) $\dfrac{x+2}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+1)+1}{(x+1)^2}$, vagyis

$$\int_0^\infty \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\,dx \qquad \textbf{(3p)}$$

egy divergens és egy konvergens improprius integrál összege, így divergens **(2p)** .
(Lehet úgy is, hogy $\dfrac{x+2}{(x+1)^2} \geq \dfrac{x+1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{x+1}$, aminek az integrálja divergens.)

IMSC feladat (14 IMSC pont)
5 liter olajat olyan flakonba csomagolnak, amelyik egy félgömbből és egy hengerből áll. A henger a félgömbhöz az alapkör mentén csatlakozik. Hogy kellene megadni a henger alapkörének (és egyben a félgömbnek) a sugarát, hogy a lehető legkevesebb műanyagot használjanak? (Igazolja azt is, hogy valóban minimumról van szó!)

Mo. A flakon felszínét kell minimalizálni, úgy, hogy a térfogata 5dm^3 legyen, vagyis r(dm) sugár, és a henger m(dm) magassága esetén: $5 = \dfrac{2}{3}\pi r^3 + mr^2\pi$ **(2p)** , amiből $m = \dfrac{5}{r^2\pi} - \dfrac{2r}{3}$ **(2p)** . A flakon felszíne:

$$A(r) = r^2\pi + 2r^2\pi + 2r\pi m = 3r^2\pi + \frac{10}{r} - \frac{4r^2\pi}{3} = 5\left(\frac{r^2\pi}{3} + \frac{2}{r}\right). \qquad \textbf{(3p)}$$

$A'(r) = 5\left(\dfrac{2r\pi}{3} - \dfrac{2}{r^2}\right) = 0$ **(2p)** ha $r = \sqrt[3]{\dfrac{3}{\pi}}$ **(2p)** , és $A''\left(\sqrt[3]{\dfrac{3}{\pi}}\right) = 10\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2}{\frac{3}{\pi}}\right) > 0$ **(2p)** , vagyis itt az A függvénynek valóban minimima van **(1p)** .
