2. Vizsgazárthelyi megoldásokkal 2010 nyár A2

1. Legyen $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & a \end{pmatrix}$, ahol $a \in \mathbf{R}$. Határozza meg $\underline{\underline{A}}$ rangját a függvényében!

MO. Gauss-eliminációval $\underline{\underline{A}} \sim \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & a+6 \end{pmatrix}$, **5p**

tehát $r(\underline{\underline{A}}) = 3$ ha $a \neq -6$, egyébként $r(\underline{\underline{A}}) = 2$. **5p**

10p

2. Legyen $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ az origón kívül és $f(0,0) = 0$. Határozza meg az f_{xx} és f_{xy} másodrendű parciálisok értékét az origóban, amennyiben azok léteznek!

MO. $f(x,0) = 0$ minden $x \in \mathbb{R}$-re, tehát $f_x(x,0) = 0$ minden $x \in \mathbb{R}$-re, így $f_{xx}(x,0) = 0$ minden $x \in \mathbb{R}$-re, azaz $f_{xx}(0,0) = 0$. **3p**

Másrészt $f_x(x,y) = \dfrac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$ az origón kívül, **3p**

így $f_x(0,y) = \dfrac{1}{y}$ ha $y \neq 0$. **2p**

Vagyis $f_x(0,y) = \dfrac{1}{y}$ ha $y \neq 0$ és $f_x(0,0) = 0$, ami persze nem deriválható az $y = 0$-ban, tehát $f_{xy}(0,0)$ nem létezik. **2p**

10p

3. Legyen T az a háromszögalapú gúla, melyet a három koordinátasík és az $x+y+z=1$ sík határol.

$$\iiint_T z\,dx\,dy\,dz = ?$$

MO. $\displaystyle\iiint_T z\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} z\,dz\,dy\,dx =$ **5p**

$$= \int_0^1\int_0^{1-x} \frac{1}{2}(1-x-y)^2\,dy\,dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\right)dx = \frac{1}{24}$$ **5p**

10p

4. Konvergensek, ill. abszolút konvergensek-e az alábbi numerikus sorok?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

MO. (a) Konvergens mert Leibniz: $\frac{1}{n} \searrow 0$, $\ln x \nearrow$ $\rightsquigarrow$ $\ln(1+\frac{1}{n}) \searrow 0$, **3p**

de nem abszolút konvergens: $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$. **2p**

(b) Abszolút konvergens: $\ln(1+\frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{n^2}$. **2p**

(c) Nem konvergens: $n\ln(1+\dfrac{1}{n}) \longrightarrow 1 \neq 0$. **3p**

10p

5. Számítsa ki Taylor-sor segítségével az $\displaystyle\int_0^1 \sin x^4\,dx$ integrál értékét 0.01 pontossággal!

MO. A $\sin x$ függvény $x=0$ körüli Taylor–sorából, mely mindenütt előállítja a függvényt:

$\sin x^4 = x^4 - \dfrac{(x^4)^3}{3!} + \dfrac{(x^4)^5}{5!} \mp \ldots = x^4 - \dfrac{x^{12}}{3!} + \dfrac{x^{20}}{5!} \mp \ldots$ **3p**

Hatványsor egyenletesen konvergens $\rightsquigarrow$ az integrálás és összegzés felcserélhető $\rightsquigarrow$ **2p**

$$\int_0^1 \sin x^4\,dx = \left.\frac{x^5}{5} - \frac{x^{13}}{13\cdot 6} + \frac{x^{21}}{21\cdot 120} \mp \ldots\right|_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{13\cdot 6} + \frac{1}{21\cdot 120} \mp \ldots \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \int_0^1 \sin x^4\,dx \simeq \frac{1}{5} - \frac{1}{13\cdot 6} \simeq \frac{73}{390} = 0,187$$ **2p**

és a sor nyilván Leibniz, tehát az elkövetett hiba kisebb, mint az első elhagyott tag abszolút értéke: $|r| \leq \frac{1}{21\cdot 120} = \frac{1}{2520} \simeq 0,00039$. **3p**

10p

Folytatás a következő oldalon.

6.

(a) Igaz-e egy tetszőleges $n \times n$-es mátrix esetén:

(a1) pontosan akkor invertálható, ha oszlop- és sorrangja megegyezik

(a2) pontosan akkor invertálható, ha oszlopvektorai között van olyan, amely lineárisan független a többi oszlopvektortól

(b) Legyen f tetszőleges kétváltozós függvény, a a sík tetszőleges pontja és $S(a)$ az a pont egy tetszőleges környezete. Igaz-e:

(b1) ha f parciálisai deriváltjai folytonosak $S(a)$-ban, akkor f deriválható a-ban

(b2) ha a-ban f parciális deriváltjai: $f_x(a)$ és $f_y(a)$ léteznek, akkor az f deriváltja: grad f is létezik a-ban és grad $f|_a = (f_x(a), f_y(a))$

(c) Legyen $a_n > 0$ minden n-re. Igaz-e, hogy

(c1) ha a $\sum(-1)^n a_n$ numerikus sor konvergens, akkor a $\sum a_n$ is konvergens

(c2) ha a $\sum a_n$ numerikus sor konvergens, akkor a $\sum(-1)^n a_n$ is konvergens

MO.

(a1) Nem: a sor- és oszloprang mindig megegyezik **2p**

(a2) Nem: az összes oszlopvektornak lineárisan függetlennek kell lennie **1p**

(b1) Igen: tétel **1p**

(b2) Nem, pl. ha $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ az origón kívül és $f(0,0) = 0$, akkor f-nek limesze sem létezik az origóban: $f(x,0) = 0$, $f(x,x) = 1/2$, így nem folytonos és ezért nem is deriválható itt, gradiense tehát nem, de parciálisai léteznek: $f(x,0) = 0$, $f(0,y) = 0$ minden x, y-ra $\rightsquigarrow$ $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. **2p**

(c1) Nem: $\exists \sum(-1)^n 1/n$ de $\nexists \sum 1/n$ **2p**

(c2) Igen $|(-1)^n a_n| = a_n$ és ha egy sor abszolút konvergens, akkor konvergens is.

2p

10p