Matematika A1a 2008.01.09. vizsga feladatai és megoldásai

NEM hivatalos javítókulcs, csak leírtam a megoldásaimat, így természetszerűleg hibák előfordulhatnak

Feladatok:

1. Vizsgazárthelyi A1 2007/08 tél Munkaidő 90'

1. Oldja meg a $z^8 - 3z^4 - 4 = 0$ egyenletet a komplex számok körében!

2. **(a)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4 - 4^{n-4}}{4^n - 4n} = ?$ **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(4-\frac{1}{n})^n}{4^n} = ?$

3. (a) $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} x^2(e^{\frac{2}{x^2}} - 1) = ?$ (b) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\sin 2x - 2x}{x^3} = ?$

4. Döntse el, hogy létezik-e, és ha igen mekkora, az $f(x) = xe^{-x}$ függvény legkisebb ill. legnagyobb értéke a $(-\infty, \infty)$ intervallumon!

5. Határozza meg annak a testnek a térfogatát, mely az $y = \sin^2 x$ egyenletű görbe $(0,0)$ és $(\pi, 0)$ pontjai közötti szakaszának x tengely körüli megforgatásával keletkezik!

6.

(A) Melyik igaz, melyik nem ?

(a) Invertálható függvény szigorúan monoton

(b) Szigorúan monoton függvény invertálható

(c) Deriválható függvény folytonos

(d) Függvény deriváltja folytonos

(B) Legyen $a < b$ és f értelmezve az $[a, b]$ intervallumon. Melyik igaz, melyik nem ? (Az alábbiakban "integrálható" azt jelenti, hogy létezik a határozott integrálja.)

(a) Ha f integrálható $[a, b]$-n, akkor ott korlátos

(b) Ha f folytonos $[a, b]$-n, akkor integrálható ott

(c) Ha f véges sok pont kivételével folytonos az $[a, b]$-n, akkor integrálható ott

(d) Ha f integrálható $[a, b]$-n, akkor véges sok pont kivételével folytonos ott

Megoldások:

1. $z^4 = y$ behelyettesítést alkalmazzuk, ezzel visszavezettük a problémát másodfokúra:

$$y^2 - 3y - 4 = 0$$

megoldóképlet használata:

$$\frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \gg y_1 = 4; y_2 = -1$$

i) $z^4 = 4 + 0i$ trigonometrikus alakra hozás:

$$z^4 = 4(1 + 0i)$$

$$z^4 = 4(cos2\pi + isin2\pi)$$

Negyedik gyök vonása:

$$z_1 = \sqrt{2}(cos\frac{2\pi}{4} + isin\frac{2\pi}{4})$$

$$z_2 = \sqrt{2}(cos\frac{4\pi}{4} + isin\frac{4\pi}{4})$$

$$z_3 = \sqrt{2}(cos\frac{6\pi}{4} + isin\frac{6\pi}{4})$$

$$z_4 = \sqrt{2}(cos\frac{8\pi}{4} + isin\frac{8\pi}{4})$$

ii) $z^4 = -1 + 0i$ trigonometrikus alakra hozás:

$$z^4 = 4(cos\pi + isin\pi)$$

Negyedik gyök vonása:

$$z_5 = \sqrt{2}(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4})$$

$$z_6 = \sqrt{2}(cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4})$$

$$z_7 = \sqrt{2}(cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4})$$

$$z_8 = \sqrt{2}(cos\frac{7\pi}{4} + isin\frac{7\pi}{4})$$

2. (a) Egyszerűsítjük a törtet 4^n-el:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^4}{4^n}-\frac{1}{4^4}}{1-\frac{4n}{4^n}}=\underline{-\frac{1}{256}}$$

(b) visszavezetjük a problémát egy nevezetes határértékre: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a$

köv. képpen (bővítjük a törtet $\frac{1}{4^n}$-el):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(4+\frac{-1}{n})^n}{4^n}}{\frac{4^n}{4^n}}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{-\frac{1}{4}}{n})^n=\underline{\frac{1}{\sqrt[4]{e}}}$$

3. (a) Behelyettesítünk: $y=\frac{2}{x^2}$ így kapjuk:

$$\lim_{y\to 0}\frac{2}{y}(e^y-1)=\lim_{y\to 0}\frac{2(e^y-1)}{y}=\lim_{y\to 0}\ 2e^y=2$$

(L'Hospital szabályt alkalmazva)

(b) Itt is L'Hospitalunk ☺ soxor:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2cos2x-2}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4sin2x}{6x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-8cos2x}{6}=-\frac{8}{6}$$

4.

A feladat szélsőértékek keresése: ehhez a függvény deriváltját vizsgáljuk:

$$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$$

Mivel $\forall x\ \ e^{-x}>0$, így $f'(x)=0\ \Leftrightarrow\ (1-x)=0$

Tehát x = 1 helyen a függvény stagnál, nézzük, hogy előjelet vált-e, hiszen ekkor szélsőértéke lesz a függvényünknek.

Ha x < 1, akkor (1 - x) >0 -> f(x) szig. mon. nővekvő

Ha x > 1, akkor (1 - x) < 0 -> f(x) szig. mon. csökkenő

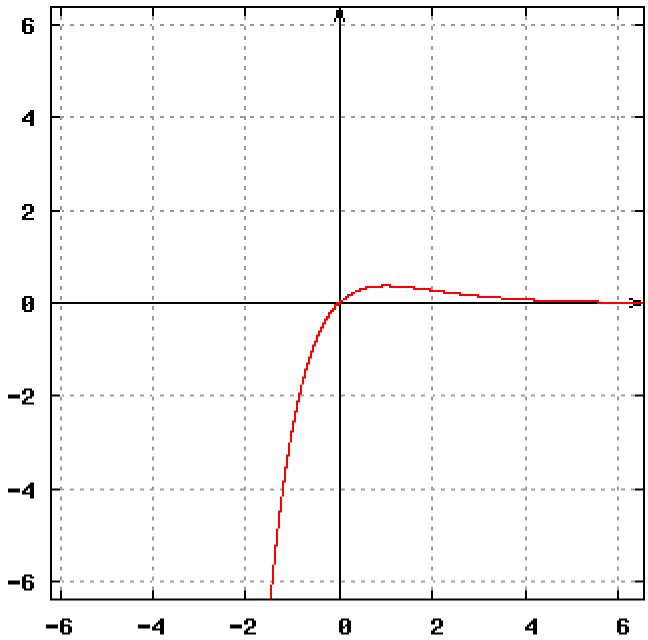
Tehát x = 1 helyen a függvénynek maximuma van, értéke: $f(1)=1*e^{-1}=\frac{1}{e}$

Most vizsgáljuk meg a függvény viselkedését az értelmezési tartomány határain (L'Hospitalunk):

$$\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

$$\lim_{x \to -\infty} xe^{-x} = -\infty$$

Ezek alapján a függvényünk jellege:



(matek.hu-ról másolva, nézzétek meg, tök jó játék! ☺)

Az az a legnagyobb érték, amit a függvényünk felvesz 1/e, legkisebb értéke pedig nem létezik.

5.

$$f(x) \; = sin^2 x$$

x körüli forgatásának térfogata (0,π)intervallumon, képletbe helyettesítve:

$$\pi \int_0^\pi sin^4 x$$

Hogy ezt az integrált meghatározzuk trigonometria „ügyeskedésre" lesz szükség:

$$sin^4 x = (sin^2 x)^2 = (\frac{1 - cos2x}{2})^2 = \frac{1 - 2cos2x + \; cos^2 2x}{4}$$

$$\pi \int_0^\pi sin^4 x = \pi \left(\int_0^\pi \frac{1}{4} - \int_0^\pi \frac{2cos2x}{4} + \int_0^\pi \frac{cos^2 2x}{4} \right)$$

$$\int cos^2 2x = \int \frac{1 + cos4x}{2} = \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int cos4x = \frac{1}{2} x + \frac{sin4x}{8}$$

$$\pi\left(\int_0^{\pi}\frac{1}{4}-\int_0^{\pi}\frac{2cos2x}{4}+\int_0^{\pi}\frac{cos^2 2x}{4}\right)=\pi\left(\left[\frac{1}{4}x\right]\begin{matrix}\pi\\0\end{matrix}-\frac{1}{2}\left[\frac{sin2x}{2}\right]\begin{matrix}\pi\\0\end{matrix}+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}x+\frac{sin4x}{8}\right]\begin{matrix}\pi\\0\end{matrix}\right)=$$

$$=\pi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)=\underline{\frac{3}{8}\pi^2}$$

6. Elméletet nem körmölök le, nézzétek ki a füzetből/tankönyvből.