ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak

II. ZÁRTHELYI pótlása, javítása

2011. dec. 1.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (13 pont)

Adja meg az

$$f(x) = \frac{2}{3+4x}$$

függvény x_0 bázispontú Taylor sorát és annak konvergencia tartományát!

a) $x_0 = 0$ b) $x_0 = 2$

a.) $$f(x) = \frac{2}{3}\,\frac{1}{1-\frac{-4x}{3}} = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-4x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{2\cdot(-4)^n}{3^{n+1}}}_{=a_n}\,x^n \quad 4$$

$$|q| = \left|\frac{-4x}{3}\right| = \frac{4}{3}|x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{3}{4}$$

$$K.T.:\ \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) \quad 2$$

b.) $$f(x) = \frac{2}{4(x-2)+11} = \frac{2}{11}\,\frac{1}{1-\frac{-4(x-2)}{11}} =$$

$$= \frac{2}{11}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-4(x-2)}{11}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{2\,(-4)^n}{(11)^{n+1}}}_{=a_n}(x-2)^n \quad 5$$

$$|q| = \left|\frac{-4(x-2)}{11}\right| = \frac{4}{11}|x-2| < 1 \Rightarrow |x-2| < \frac{11}{4}$$

$$K.T.:\ \left(2-\frac{11}{4}, 2+\frac{11}{4}\right) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{19}{4}\right) \quad 2$$

2. feladat (15 pont)

$$f(x) = x\ \mathrm{sh}\,(2\,x^2)$$

a) Írja fel az f függvény $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorát és adja meg annak konvergencia tartományát!

b) $f^{(100)}(0) = ?$, $f^{(99)}(0) = ?$ (A sorfejtésből adjon választ!)

c) Írja fel f deriváltfüggvényének $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorát!

a.) $\boxed{7}$

$$\mathrm{sh}\,u = u + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!}\,; \quad u \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = x\cdot \mathrm{sh}\,2x^2 = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!}\Bigg|_{u=2x^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!}\,x^{4n-1} \quad 5$$

$$KT:\ (-\infty, \infty) \quad 2$$

an2z2p111201/1.

b.) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ esetén: $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!} \Rightarrow f^{(n)}(0)=n!\,a_n$ (2)

$\boxed{5}$

$f^{(100)}(0)=100!\,\underbrace{a_{100}}_{x^{100} \text{ együtthatója } = 0}=0$ (1)

$f^{(99)}(0)=99!\,\underbrace{a_{99}}_{4n-1=99 \Rightarrow n=25}=99!\,\frac{2^{49}}{49!}$ (2)

c.) $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!}(4n-1)x^{4n-2}$ (Mivel fennáll a „tagonkénti deriválhatóság")

$\boxed{3}$

3. feladat (17 pont)

Írja fel az

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{16+x^4}}$$

$x_0=0$ ponthoz tartozó Taylor-sorát és adja meg annak konvergenciasugarát!

Határozza meg

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

értékét közelítően az integrálandó függvényt nyolcadfokú Taylor-polinomjával közelítve! Adjon becslést az elkövetett hibára! (Elemi műveletekkel adja meg!)

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{16}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^4}{16}}}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{x^4}{16}\right)^{-1/2}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\left(\frac{x^4}{16}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\frac{1}{16^n}x^{4n} \quad (5)$$

$$\left|\frac{x^4}{16}\right|=\frac{|x|^4}{16}<1 \Rightarrow |x|<2=R \quad (2)$$

(10)

$$f(x)=\Big(\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\,\frac{-1/2}{1}\,\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{4}\,\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\cdot 2}\,\frac{1}{16^2}x^8}_{T_8(x)}+$$

$$+\frac{1}{4}\,\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3}\,\frac{1}{16^3}\cdot x^{12}+\dots\Big)$$

Ez Leibniz sor és az integrálás után kapott numerikus sor is az lesz.

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\binom{-1/2}{1}\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{4}\binom{-1/2}{2}\frac{1}{16^2}x^8+\frac{1}{4}\binom{-1/2}{3}\frac{1}{16^3}x^{12}+\dots\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\binom{-1/2}{1}\frac{1}{16}\frac{x^5}{5}+\frac{1}{4}\binom{-1/2}{2}\frac{1}{16^2}\frac{x^9}{9}+\frac{1}{4}\binom{-1/2}{3}\frac{1}{16^3}\frac{x^{13}}{13}+\dots\Big|_0^1=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\binom{-1/2}{1}\frac{1}{16}\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\binom{-1/2}{2}\frac{1}{16^2}\frac{1}{9}}_{:=a}+\underbrace{\frac{1}{4}\binom{-1/2}{3}\frac{1}{16^3}\frac{1}{13}}_{:=b}+\dots \quad \text{Leibniz sor}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx\approx a;\quad |H|<|b|=\frac{1}{4}\left|\frac{\left(-1/2\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3}\right|\frac{1}{16^3}\frac{1}{13}$$

an2z2p11 1201/2.

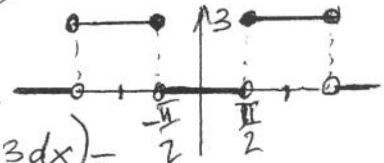
4. feladat (13 pont)

Határozza meg az alábbi függvény Fourier együtthatóit!
Írja fel a Fourier sor első négy nem nulla tagját!

$$f(x)=\begin{cases} 3\,, & \text{ha } x\in[-\pi,-\pi/2]\cup[\pi/2,\pi) \\ 0\,, & \text{ha } x\in(-\pi/2,\pi/2) \end{cases} \qquad f(x)=f(x+2\pi)\,, \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Összegfüggvénye legyen ϕ! $\quad \phi\left(\frac{\pi}{2}\right)=?$

$$\phi(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)$$



f páros $\Rightarrow b_k=0$ (2)

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)}_{ps}dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}0\,dx+\int_{\pi/2}^{\pi}3\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot 3\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)=3 \quad (2)$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\underbrace{f(x)}_{ps}\underbrace{\cos kx}_{ps}}_{ps}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos kx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}3\cos kx\,dx=$$

$$=\frac{6}{\pi}\left.\frac{\sin kx}{k}\right|_{\pi/2}^{\pi}=\frac{6}{\pi k}\Big(\underbrace{\sin k\pi}_{=0}-\sin k\frac{\pi}{2}\Big)=\begin{cases}-\frac{6}{\pi k}\,, & \text{ha } k=4l+1\\ 0\,, & \text{ha } k=2l\\ \frac{6}{\pi k}\,, & \text{ha } k=4l+3\end{cases} \quad (4)$$

$$\phi(x)=\frac{3}{2}+\frac{6}{\pi}\left(-\frac{1}{1}\cos x+\frac{1}{3}\cos 3x-\frac{1}{5}\cos 5x+\dots\right) \quad (3)$$

$$\phi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+f\left(\frac{\pi}{2}+0\right)}{2}=\frac{0+3}{2}=\frac{3}{2} \quad (2)$$

5. feladat (14 pont)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(y-6)\,x^3}{3x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=?$

b) $f'_x(0,0)=?\,,$ (A definícióval dolgozzon!)

$f'_x(x,y)=?\,,$ ha $(x,y)\neq(0,0)$

a.) $\boxed{6}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{\varrho_n\to 0\\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \dfrac{(\varrho_n \sin\varphi_n - 6)\,\varrho_n^3\cos^3\varphi_n}{3\varrho_n^2\cos^2\varphi_n + \varrho_n^2\sin^2\varphi_n} =$

$$= \lim_{\substack{\varrho_n\to 0\\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \underbrace{\frac{\varrho_n^2}{\varrho_n^2}}_{=1} \underbrace{(\underbrace{\varrho_n}_{\downarrow 0} \underbrace{\sin\varphi_n}_{\text{korl.}} - 6)}_{\downarrow 0} \underbrace{\frac{\cos^3\varphi_n}{2\cos^2\varphi_n + 1}}_{\text{korl}} \cdot \underbrace{\varrho_n}_{\downarrow 0} = 0$$

b.) $\boxed{8}$ $f'_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{-6h^3}{3h^2+0} - 0}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} -2\,\frac{\cancel{h^3}}{\cancel{h^3}} = -2 \qquad 5$$

Ha $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f'_x(x,y) = \frac{(y-6)3x^2(3x^2+y^2) - (y-6)x^3\cdot 6x}{(3x^2+y^2)^2} \qquad 3$$

6. feladat (16 pont)

$$f(x,y) = \frac{x\ e^{3y}}{x^2+1}$$

a) $f'_x = ?;\qquad f'_y = ?$
Hol létezik $\operatorname{grad} f$? (Indokoljon!)

b) $\operatorname{grad} f\,(1,0) = ?\qquad \mathrm{d}f\,((1,0),(h,k)) = ?$

c) $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(1,0)} = ?$, ha $\underline{e} \parallel \underline{i} + 3\underline{j}$

a.) $\boxed{7}$ $f'_x = e^{3y}\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)'_x = e^{3y}\,\dfrac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$ 3

$f'_y = \dfrac{x}{x^2+1}\,e^{3y}\cdot 3$ 2

f'_x, f'_y mindenütt létezik és folytonos $\Rightarrow \operatorname{grad} f\ \exists$ mindenütt

2

b.) $\boxed{14}$ $\operatorname{grad} f(1,0) = f'_x(1,0)\,\underline{i} + f'_y(1,0)\,\underline{j} = 0\cdot\underline{i} + \frac{3}{2}\underline{j}$ 2

$\mathrm{d}f((1,0),(h,k)) = f'_x(1,0)\cdot h + f'_y(1,0)\cdot k = 0\cdot h + \frac{3}{2}k = \frac{3}{2}k$

2

c.) $\boxed{5}$ $\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{(1,0)} = \text{grad} f(1,0) \cdot \underline{e}$ (2)

$\underline{v} = \underline{i} + 3\underline{j}$, $|\underline{v}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \Rightarrow \underline{e} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \frac{1}{\sqrt{10}}\underline{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\underline{j}$ (1)

$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{(1,0)} = \left(\frac{3}{2}\underline{j}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\underline{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\underline{j}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}$ (2)

7. feladat (12 pont)

$$f(x, y) = 2x^3 - 6x + 5 + y^3 - 12y$$

Keresse meg a függvény lokális szélsőértékeit! (Milyen jellegű?)

(6)
f mindenütt deriválható.
A lok. szé. létezésének szükséges feltétele: $f'_x = 0$, $f'_y = 0$
$f'_x = 6x^2 - 6 = 6(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$
és $f'_y = 3y^2 - 12 = 3(y^2-4) = 0 \Rightarrow y = \pm 2$
$P_1(1,2)$, $P_2(1,-2)$, $P_3(-1,2)$, $P_4(-1,-2)$ pontokban lehet lokális szélsőérték.

(6)
$D(x,y) = \begin{vmatrix} 12x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 72xy$
$D(P_1) > 0$ és $f''_{xx}(P_1) > 0$: lok. minimum van itt
$D(P_4) > 0$ és $f''_{xx}(P_4) < 0$: lok. maximum van itt
$D(P_2) < 0$ és $D(P_3) < 0$: P_2, P_3-ban nincs lok. szé.

Pótfeladatok (csak a 40 % eléréséig javítjuk ki):

8. feladat (11 pont)

Írja fel a következő függvények $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és adja meg a sor konvergencia tartományát!

$$f(x) = \sin(3x^2), \qquad g(x) = \text{ch}(3x^2) - 1$$

$$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \cdots \; ; \quad u \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sin 3x^2 = 3x^2 - \frac{3^3}{3!} x^6 + \frac{3^5}{5!} x^{10} - \cdots \; ; \quad x \in \mathbb{R} \qquad 5$$

$$\operatorname{ch} u = 1 + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^6}{6!} + \cdots \; ; \quad u \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \text{———} \; '' \; \text{———} \Big|_{u=3x^2} - 1 =$$

$$= \frac{3^2}{2!} x^4 + \frac{3^4}{4!} x^8 + \frac{3^6}{6!} x^{12} + \cdots \; ; \quad x \in \mathbb{R} \qquad 6$$

9. feladat (9 pont)

Határozza meg az $f(x,y) = 6 - x^2 - 3xy^2$ függvény $(x_0, y_0) = (2, -1)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét!

Az érintősík egyenlete:

$$f'_x(2,-1)(x - x_0) + f'_y(2,-1)(y - y_0) - (z - f(2,-1)) = 0$$

$$f'_x = -2x - 3y^2 \; ; \quad f'_x(2,-1) = -7$$

$$f'_y = -6xy \; ; \quad f'_y(2,-1) = 12$$

$$f(2,-1) = -4$$

$$-7(x-2) + 12(y+1) - (z+4) = 0$$