ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak

II. ZÁRTHELYI

2011. nov. 17.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (17 pont)

Adja meg az alábbi függvények megadott pontra támaszkodó Taylor sorát és annak konvergencia tartományát!

a) $f(x) = \dfrac{1}{4-3x^2}$, $x_0 = 0$ b) $g(x) = \dfrac{1}{4-x}$, $x_0 = -2$

c) $h(x) = x^3\, e^{-3x}$, $x_0 = 0$

a.) $\boxed{6}$ $f(x) = \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-\frac{3x^2}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3x^2}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{4^{n+1}}x^{2n}$ (4)

K.T.: $|q| = \left|\frac{3x^2}{4}\right| = \frac{3|x|^2}{4} < 1 \Rightarrow |x| < \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

K.T.: $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ (2)

b.) $\boxed{6}$ $g(x) = \frac{1}{6-(x+2)} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{1-\frac{x+2}{6}} =$

$= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+2}{6}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{6^{n+1}}(x+2)^n$ (4)

K.T.: $|q| = \left|\frac{x+2}{6}\right| < 1 \Longrightarrow |x+2| < 6$

K.T.: $(-8, 4)$ (2)

c.) $\boxed{5}$ $e^u = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}$

$h(x) = x^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n!}x^{n+3}$ (4)

K.T.: $(-\infty, \infty)$ (1)

2. feladat (15 pont)

Legyen

$$f(x) = \sqrt[3]{1+3x^6}$$

a) Határozza meg az f függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát, annak konvergenciasugarát!
b) $f^{(18)}(0) = ?$ (Elemi műveletekkel adja meg!)
c) Az $f(x)$ értékét az $x = 0,1$ pontban a 12-edrendű Taylor polinomja segítségével számoljuk ki.
Becsülje meg az így elkövetett hibát!

an2zz2111117/1.

a.) $\boxed{6}$ $f(x)=(1+3x^6)^{1/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/3}{n} (3x^6)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/3}{n} 3^n x^{6n}$ (4)

$|3x^6| = 3|x|^6 < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt[6]{3}} \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt[6]{3}}$ (2)

b.) $\boxed{4}$ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ esetén $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \Rightarrow f^{(n)}(0) = n!\, a_n$ (2)

$f^{(18)}(0) = 18!\, \underbrace{a_{18}}_{x^{18} \text{ együtthatója}} = 18! \binom{1/3}{3} \cdot 3^3 = 18! \frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot 3^3$ (2)

$6n = 18 \Rightarrow n = 3$

c.) $\boxed{4}$ $f(0{,}1) \approx T_{12}(0{,}1) = \sum_{n=0}^{2} \binom{1/3}{n} 3^n\, 0{,}1^{6n} =$

$= 1 + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 0{,}1^6 + \frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})}{1 \cdot 2} \cdot 3^2\, 0{,}1^{12}$

Leibniz sor

Ezért: $|H| < \left| \binom{1/3}{3} 3^3\, 0{,}1^{18} \right|$

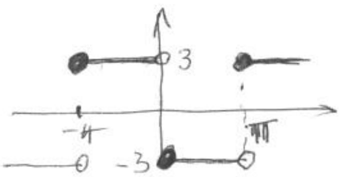
3. feladat (15 pont)

Határozza meg az alábbi függvény Fourier együtthatóit!

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{ha } x \in [-\pi\,,\, 0) \\ -3, & \text{ha } x \in [0\,,\, \pi) \end{cases} \qquad f(x) = f(x+2\pi)\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Írja fel a Fourier sor első négy nem nulla tagját!
A sor összegfüggvénye legyen ϕ ! $\phi(0) = ?$, $\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$
Egyenletesen konvergens-e a Fourier sor?

$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \neq n\pi \\ 0, & \text{ha } x = n\pi \end{cases}$



f és f^* Fourier együtthatói azonosak és f^* már páratlan.

$\Rightarrow a_k = 0\,, \quad k = 0,1,2,\dots$ (2)

$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underset{\text{ptl}}{f^*(x)}\, \underset{\text{ptl}}{\sin kx}}_{\text{ps}}\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (-3) \sin kx\, dx$

$= -\frac{6}{\pi} \left. \frac{-\cos kx}{k} \right|_0^{\pi} = \frac{6}{\pi \cdot k} (\cos k\pi - 1) = \frac{6}{\pi k} ((-1)^k - 1) =$

$= \begin{cases} 0, & \text{ha } k \text{ ps} \\ -\frac{12}{\pi} \frac{1}{k}, & \text{ha } k \text{ ptl} \end{cases}$ (5)

an2z211111712.

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = -\frac{12}{\pi}\left(\frac{1}{1}\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \dots\right)$$ 3

$$\Phi(0) = \frac{f(0+0)+f(0-0)}{2} = 0$$ 2

$\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$, f folytonossága miatt. 1

A Fourier sor nem egyenletesen konverergens, mert a sinkx függvények folytonosak, de a Φ összegfüggvény nem folytonos. 2

4. feladat (21 pont)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)\,y^2}{x^2+y^2} + 3y\,, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Folytonos-e f az origóban?
b) $f'_x(0,0) = ?\,,\quad f'_y(0,0) = ?$ (A definícióval dolgozzon!)
   $f'_x(x,y) = ?\,,$ ha $(x,y) \neq (0,0)$
c) Deriválható-e f a $(0,0)$ pontban?

a.) $\boxed{6}$

$$\underbrace{\lim_{x\to 0} f(x, mx)}_{\nexists,\text{ mert függ } m\text{-től}} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)\,m^2x^2}{x^2+m^2x^2} + \underbrace{3mx}_{\to 0} = \frac{m^2}{1+m^2}$$

$$= \frac{(x+1)\,m^2}{1+m^2} \to \frac{m^2}{1+m^2}$$

$\nexists$, mert függ m-től $\Rightarrow$ f nem folytonos (0,0)-ban.

b.) $\boxed{12}$

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$ 4

$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{k^2}{k^2}+3k-0}{k} =$$

$$= \lim_{k\to 0}\left(\frac{1}{k}+3\right) = \nexists \quad \left(\lim_{k\to 0\pm 0}\left(\frac{1}{k}+3\right) = \pm\infty\right)$$ 5

Ha $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f'_x(x,y) = \frac{y^2(x^2+y^2) - (x+1)\,y^2\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$ 3

c.) $\boxed{3}$ f nem deriválható (0,0)-ban, mert f nem folytonos (0,0)-ban.

(Vagy: $f'_y(0,0)$ $\nexists$, ezért nem deriválható f a (0,0)-ban) an2 z 2 111111/3.

5. feladat (24 pont)

$$f(x,y) = (2x-y)^2 + 4x^2 - 8y\,, \quad P_0(1,2)$$

a) $f'_x(x,y) = ?$; $f'_y(x,y) = ?$, $\operatorname{grad} f(P_0) = ?$

b) Adja meg $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0}$ értékét, ha $\underline{e} \parallel -8\underline{i} + 6\underline{j}$

c) $\max \left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$ Milyen irányban kapjuk? ($\underline{e} = ?$)

d) Hol lehet f-nek lokális szélsőértéke?
Van-e lokális szélsőértéke? Ha igen, milyen jellegű?

a.) $\boxed{6}$

$f'_x = 2(2x-y)\cdot 2 + 8x$ (2)

$f'_y = 2(2x-y)(-1) - 8$ (2)

$\operatorname{grad} f(P_0) = f'_x(P_0)\,\underline{i} + f'_y(P_0)\,\underline{j} = 8\underline{i} - 8\underline{j}$ (2)

b.) $\boxed{5}$

$\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = \operatorname{grad} f(P_0)\,\underline{e}$ (2)

$\underline{v} = -8\underline{i} + 6\underline{j}$; $|\underline{v}| = \sqrt{64+36} = 10 \Rightarrow \underline{e} = -\frac{8}{10}\underline{i} + \frac{6}{10}\underline{j}$ (1)

$\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = (8\underline{i} - 8\underline{j})\left(-\frac{8}{10}\underline{i} + \frac{6}{10}\underline{j}\right) = -\frac{64}{10} - \frac{48}{10}$ (2)

c.) $\boxed{4}$

$\max \left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = |\operatorname{grad} f(P_0)| = \sqrt{64+64} = \sqrt{128}$ (2)

$\underline{e} = \dfrac{\operatorname{grad} f(P_0)}{|\operatorname{grad} f(P_0)|} = \dfrac{8}{\sqrt{128}}\underline{i} - \dfrac{8}{\sqrt{128}}\underline{j}$ irányban kapjuk (2)

d.) $\boxed{9}$

Szükséges feltétel (f mindenütt deriválható):

$f'_x = 16x - 4y = 0$ és $f'_y = -4x + 2y - 8 = 0$

$\Rightarrow x = 2$ és $y = 8$

Tehát csak a $P_0(2,8)$ pontban lehet lok. sz.é. (4)

(5)

$D(x,y) = \begin{vmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 16 > 0$

$D(P_0) > 0$: van P_0-ban lok. sz.é.

$f''_{xx}(P_0) > 0$: lokális min. van.

an2z2111117/4.

6. feladat (8 pont)

A $g \in C^2_{\mathbb{R}}$ egyváltozós függvény változója helyébe írjuk az $x y^3$ kifejezést! Legyen az így kapott kétváltozós függvény $f(x, y) = g(x y^3)$!

$$f'_x = ?\,, \qquad f'_y = ?\,, \qquad f''_{xy} = ?\,, \qquad f''_{yx} = ?$$

$f_x' = g'(xy^3)\cdot y^3$ 2

$f_y' = g'(xy^3)\cdot 3xy^2$ 2

$f''_{xy} = (g''(xy^3)\cdot 3xy^2)\cdot y^3 + g'(xy^3)\cdot 3y^2$ 3

$f''_{yx} = f''_{xy}$ 1

Pótfeladatok (csak a 40 % eléréséig javítjuk ki):

7. feladat (10 pont)

Írja fel az

$$f(x) = e^{2x}$$

x_0 bázispontú Taylor sorait és azok konvergenciasugarait!

a) $x_0 = 0$ b) $x_0 = 4$

$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$ $R = \infty$

a.) $e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$ 3

$\boxed{4}$

$R = \infty$ 1

b.) $e^{2x} = e^{2(x-4)+8} = e^8 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2(x-4))^n}{n!} =$

$\boxed{6}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} e^8 \frac{2^n}{n!} (x-4)^n$ 5

$R = \infty$ 1

an2z2111117 | 5.

8. feladat (10 pont)

$$f(x,y) = \frac{e^{2x+3y}}{2x^2+1}$$

a) $\operatorname{grad} f(0,1) = ?$

b) Írja fel a $P_0(0\,,\,1)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét!

a.) $f(x,y) = \frac{e^{2x}}{2x^2+1} \, e^{3y}$

$\boxed{6}$

$f_x' = \frac{2e^{2x}(2x^2+1) - e^{2x} \cdot 4x}{(2x^2+1)^2} \cdot e^{3y}$

$f_y' = \frac{e^{2x}}{2x^2+1} \, 3 \cdot e^{3y}$

$\operatorname{grad} f(0,1) = f_x'(0,1)\underline{i} + f_y'(0,1)\underline{j} = 2e^3\underline{i} + 3e^3\underline{j}$

b.) $f_x'(P_0)(x-x_0) + f_y'(P_0)(y-y_0) - (z - f(P_0)) = 0$ 2

$\boxed{4}$

$2e^3(x-0) + 3e^3(y-1) - (z - e^3) = 0$ 2

au2z21111117/6.