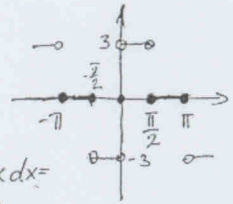
feladat (12 pont)

a) Hogyan definiáljuk a 2π szerint periodikus, Riemann-integrálható függvények skaláris szorzatát?

b) Határozza meg az alábbi függvény Fourier sorát!

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha } x\in[-\pi,-\pi/2]\cup[\pi/2,\pi] \\ -3, & \text{ha } x\in(-\pi/2,0) \\ 0, & \text{ha } x=0 \\ 3, & \text{ha } x\in(0,\pi/2) \end{cases} \qquad f(x)=f(x+2\pi),\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

a.) $(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(x)\,dx$ (1)



b.) f páratlan $\Rightarrow a_k=0$ (1) ; $k=0,1,\dots$

$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\underset{\text{ptl.}}{f(x)}\cdot\underset{\text{ptl.}}{\sin kx}}_{ps\ (1)}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin kx\,dx=$ (1)

képlet: (1)

$=\frac{2}{\pi}\cdot 3\int_0^{\pi/2}\sin kx\,dx=\frac{6}{\pi}\left.\frac{-\cos kx}{k}\right|_0^{\pi/2}=-\frac{6}{k\pi}\left(\cos k\frac{\pi}{2}-1\right)=$ (1) (2)

$$=\begin{cases}\frac{6}{k\pi}, & \text{ha } k=2l-1\\ \frac{12}{k\pi}, & \text{ha } k=4l+2\\ 0, & \text{ha } k=4l\end{cases}$$ (2)

$f\sim\Phi^f(x)=\frac{6}{\pi}\left(\sin x+\frac{2}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{2}{6}\sin 6x+\dots\right)$ (2)

Folytonossági helyeken: $f(x)=\Phi(x)$

Szakadási helyeken: $\Phi(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$

$\Rightarrow f(x)=\Phi(x)$, ha $x\neq\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$0=f(\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi)\neq\Phi(\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi)=\pm\frac{3}{2}\qquad(k\in\mathbb{Z})$

5. feladat (16 pont)

$$f(x,y)=\frac{e^{4y-x^2}}{y^2+1}$$

a) Totálisan deriválható-e az f függvény a $P(-2,1)$ pontban?

b) $\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{(-2,1)}=?$, ha $\underline{e}\parallel[-3,4]$

c) Írja fel a P ponthoz tartozó érintősík egyenletét!

d) $df((-2,1),(dx,dy))=?$

a.) $f'_x=\frac{1}{y^2+1}e^{4y-x^2}(-2x)$ (2)

$f'_y=\frac{4e^{4y-x^2}(y^2+1)-e^{4y-x^2}\cdot 2y}{(y^2+1)^2}$ (2)

K_P-ben léteznek és folytonosak $\Rightarrow \operatorname{grad} f|_P\ \exists$ (2)

(Egyébként mindenhol $\exists$ grad f)

b.) $\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_P=\operatorname{grad} f|_P\cdot\underline{e}$ (1) alkalmazható.

$f'_x(P)=2$; $f'_y(P)=\frac{4\cdot 2-2}{4}=\frac{3}{2}$: $\operatorname{grad} f(P)=2\underline{i}+\frac{3}{2}\underline{j}$ (1)

$\underline{e}=\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}=\frac{-3\underline{i}+4\underline{j}}{\sqrt{9+16}}=-\frac{3}{5}\underline{i}+\frac{4}{5}\underline{j}$ (1)

$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_P=\left(2\underline{i}+\frac{3}{2}\underline{j}\right)\left(-\frac{3}{5}\underline{i}+\frac{4}{5}\underline{j}\right)=-\frac{6}{5}+\frac{6}{5}=0$ (2)

c.) $f'_x(P)\,(x-(-2))+f'_y(P)(y-1)-(z-\underbrace{f(-2,1)}_{=\frac{1}{2}})=0$

képlet: (1)

$2(x+2)+\frac{3}{2}(y-1)-(z-\frac{1}{2})=0$

behelyettesítés: (2)

d.) $df((-2,1),(dx,dy))=f'_x(-2,1)\,dx+f'_y(-2,1)\,dy=$

$=2\,dx+\frac{3}{2}\,dy$ (2)