ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak

VIZSGADOLGOZAT

2010. máj. 27.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (13 pont)

a) Írja fel az elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet általános alakját és oldja meg!
b) A homogén vagy az inhomogén differenciálegyenlet megoldásai alkotnak-e lineáris teret? Hány dimenziós ez a lineáris tér?

$\boxed{11}$ a) (H): $y' + g(x) \cdot y = 0$ (szeparábilis differenciálegyenlet)

$\frac{dy}{dx} = -g(x) \cdot y$ $\quad$ $y \equiv 0$ megoldás

Ha $y \neq 0$: $$\int \frac{dy}{y} = -\int g(x)\,dx\,.$$

Jelöljük g primitív függvényét G-vel! (G létezik g folytonossága miatt.) Ekkor

$$\ln|y| = -G(x) + C_1$$

$$|y| = e^{C_1} e^{-G(x)} = K\, e^{-G(x)}, \quad K > 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} y > 0: & y = K\, e^{-G(x)} \\ y < 0: & y = -K\, e^{-G(x)} \\ & (K > 0) \\ \text{és} & y \equiv 0 \text{ is megoldás.} \end{array}\right\} \Longrightarrow y = C\, e^{-G(x)}, \quad C \in \mathbb{R}$$

az általános megoldás.
(A megoldást azon az (α, β) intervallumon kaptuk meg, ahol g folytonos.)

b.) A homogén egyenlet megoldásai alkotnak lineáris ~~teret~~ teret.
$\boxed{2}$ A tér egydimenziós.

2. feladat (10 pont)

a) Írja fel az f függvény x_0 bázispontú harmadfokú Taylor polinomját és a hozzá tartozó hibatag Lagrange féle alakját!
b) A Taylor polinom definíciójának felhasználásával adja meg az
$$f(x) = \cos x + \sin 2x + 3$$
függvény $x_0 = \frac{\pi}{2}$ bázispontú harmadfokú Taylor polinomját!

a.) $T_3(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3$
$\boxed{4}$ 2

$R_3(x) = \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}(x - x_0)^4 \quad \xi \in (x_0, x)$ vagy $\xi \in (x, x_0)$
2

an20100527/1.

b.) $f(x) = \cos x + \sin 2x + 3$ $\qquad f(\frac{\pi}{2}) = 3$

$\boxed{6}$ $f'(x) = -\sin x + 2\cos 2x$ $\qquad f'(\frac{\pi}{2}) = -3$

$f''(x) = -\cos x - 4\sin 2x$ $\qquad f''(\frac{\pi}{2}) = 0$

$f'''(x) = \sin x - 8\cos 2x$ $\qquad f'''(\frac{\pi}{2}) = 9$

$$T_3(x) = 3 + \frac{-3}{1!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 0 + \frac{9}{3!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3$$

3. feladat (9+6=15 pont)

a) A tanult módszerrel mutassa meg, hogy

$$f(x) = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots$$

Mi a sor konvergenciasugara?

b) Ennek felhasználásával adja meg a

$$g(x) = \operatorname{arctg}\,(3x^2)$$

függvény Taylor sorát és annak konvergenciasugarát!

a.)

$\boxed{9}$ $$f'(x) = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots; \qquad q := -x^2$$

$$\text{KT.:} \quad |q| = \left|-x^2\right| < 1 \longrightarrow |x| < 1, \quad R = 1$$

$$\int_0^x (\operatorname{arctg} x)'\,dx \overset{N-L.}{=} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 = \operatorname{arctg} x = \int_0^x \left(1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots\right) dt =$$

$$= t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \cdots \Big|_0^x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

Tehát

$$\boxed{\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \left(= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)}$$

$R = 1$ (változatlan)

b.)

$\boxed{6}$ $$g(x) = 3x^2 - \frac{(3x^2)^3}{3} + \frac{(3x^2)^5}{5} - \cdots = 3x^2 - \frac{3^3 x^6}{3} + \frac{3^5 x^{10}}{5} - \cdots$$ 3

(Vagy $\operatorname{arctg} 3x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(3x^2)^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^{2n-1}}{2n-1} x^{4n-2}$)

R: $\quad |3x^2| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 3

an2v100527/2.

14

4. feladat (~~10~~ **pont)**

a) Definiálja egy kétváltozós függvény parciális deriváltjait és totális deriválhatóságát!

b) Mi a kapcsolat a totális deriválhatóság és a folytonosság között?
Állítását bizonyítsa be, illetve mutasson ellenpéldát!

a.) $\boxed{6}$ (D) $f'_x(x_0,y_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$ (2)

(D) $f'_y(x_0,y_0) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}$ (2)

(D) $f: D \mapsto \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$; $\underline{a} = (x_0,y_0) \in \text{int} D$, $\underline{h} = (h,k)$ és $\underline{a}+\underline{h} \in D$
f totálisan deriválható (x_0,y_0)-ban, ha Δf előállítható az alábbi alakban:

(2) $\Delta f = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = A\cdot h + Bk + \varepsilon_1\cdot h + \varepsilon_2 k$,
ahol A, B független h-tól, k-tól és $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \varepsilon_i = 0$; $i=1,2$

(Vagy:
$\Delta f = f(\underline{a}+\underline{h}) - f(\underline{a}) = \underline{A}\cdot\underline{h} + \underline{\varepsilon}\cdot\underline{h}$, ahol $\underline{A}$ független $\underline{h}$-tól és $\lim\limits_{\underline{h}\to\underline{0}} \underline{\varepsilon} = \underline{0}$)

b.) $\boxed{8}$ (T) Ha f $\underline{a}$-ban totálisan deriválható $\Rightarrow$ f $\underline{a}$-ban folyto (2)

(B) A definíció miatt:
$f(\underline{a}+\underline{h}) = f(\underline{a}) + \underline{A}\cdot\underline{h} + \underline{\varepsilon}\cdot\underline{h}$

Mindkét oldal limeszét vesszük:

$$\underbrace{\lim_{\underline{h}\to 0} f(\underline{a}+\underline{h})}_{\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x})} = \lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \big(\underbrace{f(\underline{a})}_{\downarrow\, f(\underline{a})} + \underline{A}\cdot\underbrace{\underline{h}}_{\downarrow\,\underline{0}} + \underbrace{\underline{\varepsilon}}_{\downarrow\,\underline{0}}\cdot\underbrace{\underline{h}}_{\downarrow\,\underline{0}}\big) = f(\underline{a})$$

Tehát határérték = helyettesítési érték (4)
$\Rightarrow$ f folytonos $\underline{a}$-ban

A folytonosságból nem következik a deriválhatóság.
(Pl) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ folytonos $(0,0)$-ban, de nem deriválható, mert pl. $f'_x(0,0) \nexists$. (2)

an2v100527/3.

5. feladat (12 pont)

$$f(x,y) = 3y + e^{xy^2} + \operatorname{arctg}\frac{x}{y}, \qquad P_0\,(0,1)$$

a) $f'_x(x,y) = ?$; $\quad f'_y(x,y) = ?$, $\qquad \operatorname{grad} f(P_0) = ?$

b) Írja fel az f függvény P_0 pontbeli érintősíkjának egyenletét!

a.) $f'_x = y^2 e^{xy^2} + \dfrac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{y}$ $\quad$ 3 $\quad (y \neq 0)$

$f'_y = 3 + 2xye^{xy^2} + \dfrac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\, x \cdot \dfrac{-1}{y^2}$ $\quad$ 3 $\quad (y \neq 0)$

$\operatorname{grad} f(P_0) = f'_x(P_0)\,\underline{i} + f'_y(P_0)\,\underline{j} = 2\underline{i} + 3\underline{j}$ $\quad$ 2

b.) Az érintősík:

$f'_x(P_0)(x-x_0) + f'_y(P_0)(y-y_0) - (z - f(P_0)) = 0$ $\quad$ 2

$2(x-0) + 3(y-1) - (z-4) = 0$ $\quad$ 2

6. feladat (15 pont)*

a) Írja le polárkoordinátákkal a T tartományt!

$$T = \{(x,y):\quad 1 \le x^2+y^2 \le 4\,;\quad x \le 0\,;\quad y \le 0\}$$

b) Írja fel a Jacobi determinánst polártranszformáció esetére és határozza meg az értékét!

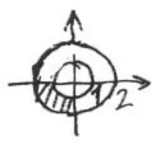
c)

$$\iint_T \frac{1}{(3x^2+3y^2+7)^4}\;dT = ?$$

a.) $\boxed{4}$

$x = r\cos\varphi \qquad 1 \le r \le 2$

$y = r\sin\varphi \qquad \pi \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$



b.) $\boxed{4}$

$J = \det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = \underbrace{r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi}_{=r(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} = r$

c.) $\boxed{7}$

$I = \displaystyle\int_1^2 \int_{\pi}^{3\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(3r^2+7)^4}\,\underbrace{r}_{|J|}\,d\varphi\,dr$ 3 $= \left(3\frac{\pi}{2} - \pi\right)$ 1 $\dfrac{1}{6}\displaystyle\int_1^2 6r\,(3r^2+7)^{-4}\,dr$ $\quad f'\,f^{-4}$

$= \dfrac{\pi}{12}\,\left.\dfrac{(3r^2+7)^{-3}}{-3}\right|_1^2 = -\dfrac{\pi}{36}\left(\dfrac{1}{19^3} - \dfrac{1}{10^3}\right)$ 3

an2v100527/4.

7. feladat (9 pont)*

$$f(z) = u(x,y) + j\,v(x,y)$$

a) Írja le a Cauchy-Riemann parciális differenciálegyenleteket!

b) $f'(z) = ?$ Adjon két különböző képletet a parciális deriváltakkal!

Tudjuk, hogy a $v(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 3y$ egy reguláris f függvény imaginárius része. $f'(-1+2j) = ?$

a.) $u'_x = v'_y$ és $u'_y = -v'_x$ (2)

b.) $f'(z) = u'_x(x,y) + j v'_x(x,y) = u'_x(x,y) - j u'_y(x,y) = \dots$ (4)

$f'(-1+2j) = v'_y(-1,2) + j\, v'_x(-1,2)$

$v'_x = 3x^2 - 3y^2 \qquad v'_x(-1,2) = -9$

$v'_y = -6xy + 3 \qquad v'_y(-1,2) = 15$

$f'(-1+2j) = 15 - j\,9$ (3)

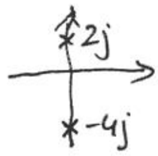
8. feladat (16 pont)*

Adja meg az alábbi integrálok valós és képzetes részét!

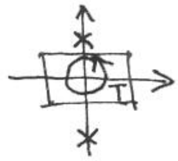
a) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{(z-2j)(z+4j)}\,dz = ?$ b) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{\sin z}{(z-2j)(z+4j)}\,dz = ?$

c) $\displaystyle\oint_{|z|=5} \frac{\sin z}{(z-2j)(z+4j)}\,dz = ?$

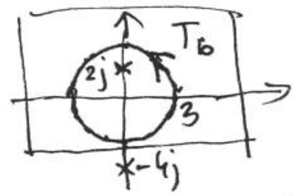
$g(z) := \dfrac{\sin z}{(z-2j)(z+4j)}$ szing. pontok: $2j, -4j$ (2)



a.) (3)



$I_a = 0$, mert g reg T-n (Cauchy-féle alaptétel)

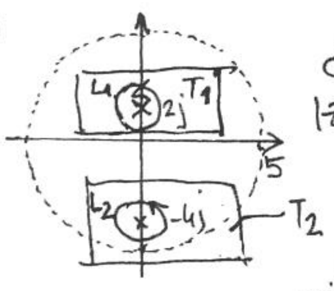


b.) (4)

$\displaystyle I_b = \oint_{|z|=3} \frac{\frac{\sin z}{z+4j}}{z-2j}\,dz = 2\pi j \left.\frac{\sin z}{z+4j}\right|_{z=2j} =$ ($\frac{\sin z}{z+4j}$ reg T_b-n)

$= 2\pi j \dfrac{\sin 2j}{6j} = \dfrac{\pi}{3} j\, \mathrm{sh}\, 2 \qquad \mathrm{Re}\, I_b = 0;\ \mathrm{Im}\, I_b = \dfrac{\pi}{3}\mathrm{sh}\, 2$

c.) (7)



$\displaystyle\oint_{|z|=5} g(z)\,dz = \oint_{L_1} \frac{\frac{\sin z}{z+4j}}{z-2j}\,dz + \oint_{L_2} \frac{\frac{\sin z}{z-2j}}{z+4j}\,dz =$ ($\frac{\sin z}{z+4j}$ reg. T_1-n; $\frac{\sin z}{z-2j}$ reg. T_2-ön)

$= 2\pi j \left.\dfrac{\sin z}{z+4j}\right|_{z=2j} + 2\pi j \left.\dfrac{\sin z}{z-2j}\right|_{z=-4j} = j\dfrac{\pi}{3}\mathrm{sh}\,2 + 2\pi j \dfrac{\sin(-4j)}{-6j} =$

$= j\underbrace{\left(\frac{\pi}{3}\mathrm{sh}\,2 + \frac{\pi}{3}\mathrm{sh}\,4\right)}_{\mathrm{Im}\, I_3};\quad \mathrm{Re}\, I_3 = 0$

an2v10052715.

Pótfeladatok. Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

9. feladat (10 pont)

Adja meg az

$$y'' - 7y' + 10y = 10x + 9e^{-x}$$

differenciálegyenlet összes megoldását!

(H): $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 5$

$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}$ (4) $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(I):
$$\begin{array}{r|l} 10 & y_{ip} = Ax + B + Ce^{-x} \\ -7 & y_{ip}' = A - Ce^{-x} \\ 1 & y_{ip}'' = Ce^{-x} \end{array}$$

$x(10A) + (10B - 7A) + e^{-x}(10C + 7C + C) = 10x + 9e^{-x}$

$10A = 10 \Rightarrow A = 1$

$10B - 7A = 0 \Rightarrow B = \frac{7}{10}$

$18C = 9 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

$y_{ip} = x + \frac{7}{10} + \frac{1}{2}e^{-x}$ (4)

$y_{iá} = y_H + y_{ip} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x} + x + \frac{7}{10} + \frac{1}{2}e^{-x}$ (2)

10. feladat (10 pont)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{8 + 5x^2}}$$

Határozza meg az f függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát és annak konvergenciasugarát!
Írja fel az első négy nem nulla tagot elemi műveletekkel!

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} \frac{1}{\sqrt[3]{1 + \frac{5x^2}{8}}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5x^2}{8}\right)^{-1/3} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/3}{n}\left(\frac{5x^2}{8}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/3}{n}\left(\frac{5}{8}\right)^n x^{2n} \quad (4)$$

R: $\left|\frac{5x^2}{8}\right| = \frac{5}{8}|x|^2 < 1 \Rightarrow |x| < \sqrt{\frac{8}{5}} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{8}{5}}$ (3)

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{5}{8}x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)}{2}\left(\frac{5}{8}\right)^2 x^4 + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{5}{8}\right)^3 x^6 + \dots\right)$$

(3)

an2v-100527/6.