2. Zárthelyi megoldásokkal A1 2012 ősz

1. $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} n\cdot(\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2)=?$

MO. (a) "Konjugálttal való szorzás": $\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2=\dfrac{\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2}$ 3p

$$\rightsquigarrow\ n\cdot(\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2)=\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2}\xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{}\frac{1}{4}$$ 7p

10p

2. (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+4^n}{n^4-4^{n+1}}=?$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n}{(4-\frac{1}{n})^n}=?$

MO.

(a) $\dfrac{n+4^n}{n^4-4^{n+1}}=\dfrac{n\,4^{-n}+1}{n^4\,4^{-n}-4}\longrightarrow-\dfrac{1}{4}$ (hiszen $\dfrac{n^k}{a^n}\longrightarrow 0$ minden $k\in\mathbb{N}$ és $a>1$ esetén) 5p

(b) $\dfrac{4^n}{(4-\frac{1}{n})^n}=\dfrac{1}{(1-\frac{1}{4n})^n}\longrightarrow\dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt[4]{e}}}=\sqrt[4]{e}$ 5p

10p

3. Legyen $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}$ és $f(0)=0$. Hol és milyen szakadása van az f függvénynek!

MO. Az f folytonos az egész számegyenesen. Valóban, csak ott szakadhat el, ahol a nevezők valamelyike eltűnik, azaz az origóban vagy ott, ahol

$$e^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{x}}$$ 1p

tehát, mivel az exponenciális függvény 1-1, ott ahol $\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}$. 2p

De csak a 0 egyenlő az ellentettjével, és egy nem nulla számlálójú tört sehol nem nulla. Vagyis csak az origóban szakadhatna el. 2p

De itt mind a jobb, mind a baloldali határértéke 0, hisz

$$\lim_{x\to0+}e^{\frac{1}{x}}=\infty,\ \lim_{x\to0+}e^{-\frac{1}{x}}=0\ \rightsquigarrow\ \lim_{x\to0+}f(x)=0$$

és a másik oldalról szerepcserével analóg. 5p

Megjegyzés. Egyébkent nagy x-ekre $f(x)\sim x/2$ mert kis x-ekre $e^x-1\sim x\ \rightsquigarrow\ e^{1/x}-1-(e^{-1/x}-1)\sim 1/x-(-1/x)=2/x\ \rightsquigarrow\ 1/(e^{1/x}-e^{-1/x})\sim x/2.$

10p

4. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+2x^2)\ln(1+\dfrac{2}{x^2})=?$

MO. $(1+2x^2)\ln(1+\dfrac{2}{x^2})=\ln(1+\dfrac{2}{x^2})+2x^2\ln(1+\dfrac{2}{x^2})$ 1p

ln folytonos az $x=1$-ben, tehát $\ln(1+\dfrac{2}{x^2})\xrightarrow[x\to\infty]{}\ln 1=0.$ 2p

Továbbá $\dfrac{\ln(1+x)}{x}\xrightarrow[x\to0]{}1$, miatt $2x^2\ln(1+\dfrac{2}{x^2})=4\,\dfrac{\ln(1+\frac{2}{x^2})}{\frac{2}{x^2}}\ \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow\ \lim_{x\to\infty}2x^2\ln(1+\frac{2}{x^2})=\lim_{y\to0}4\,\frac{\ln(1+y)}{y}=4.$$ 7p

Tehát $\lim\limits_{x\to\infty}(1+2x^2)\ln(1+\dfrac{2}{x^2})=0+4=4.$

10p

Folytatás a következő oldalon.

5. Egyenletesen folytonos-e az $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ függvény a $(0, 1]$ intervallumon?

MO. Igen, ugyanis $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ miatt $\dfrac{\sin x}{x}$-nek az origóban *megszüntethető szakadása* van,

azaz f kiterjeszthető a g folytonos függvénnyé a $[0, 1]$-en **4p**

és Heine-tétellel g egyenletesen folytonos. **2p**

Ez a tulajdonság nyilván részhalmazokra öröklődik, **2p**

így g a $(0, 1]$-en egyenletesen folytonos, de itt megegyezik f-el. **2p**

10p

6.

(1) Melyek igazak és melyek hamisak az alábbi állítások közül?

(a) Minden monoton sorozatnak van korlátos részsorozata.
(b) Minden konvergens sorozatnak van korlátos részsorozata.
(c) Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

(2) Igaz-e, hogy

(a) Nem korlátos intervallumon szigorúan monoton növő pozitív függvény nem korlátos.
(b) Nyílt intervallumon szigorúan monoton függvény egyik szélsőértékét sem veszi fel.
(c) Ha f pozitív, folytonos és nem korlátos $[0, 1)$-en, akkor $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \infty$.

MO.

(1)

(a) Nem igaz, pl. $a_n = n$. **1p**

(b) Igaz, mert minden konvergens sorozat maga is korlátos, így *minden* részsorozata korlátos. **1p**

(c) Igaz: Bolzano-Weierstrass tétel. **1p**

(2)

(a) Nem: pl. $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$ az $[1, \infty)$-en. **2p**

(b) Igaz: minden $x \in (a, b)$-hez van $y, z \in (a, b)$, $y < x < z$. **2p**

(c) Nem: pl. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ha $x \neq 1 - \frac{1}{n}$, $f(1 - \frac{1}{n}) = 1$ $(n \in \mathbb{N})$. **3p**

10p

$$\frac{\left|\sin \frac{1}{1-x}\right|}{1-x}$$