~~I.~~ TÉTEL

Térbeli koordinátageom: sík, egyenes
Skaláris fogalma, kiszám.
Vektoriális fogalma, kiszám.
Vegyes szorzat fogalma, kiszám., kapcs. előjeles tér fogat

Sík

$\boxed{\text{Def:}}$ Ha S a tér egy síkja, akkor az $\underline{n}$-t az S sík normálvektorának nevezzük, ha $\underline{n} \neq \underline{0}$ és $\underline{n} \perp \forall\, \underline{v} \in S$ vektorra. A sík egyértelműen meghatározható, ha tudjuk ~~egy~~ pontját és ~~egy~~ normálvekt.

Az ~~n~~ $\underline{n} = (a, b, c)$ ~~lesz~~ normálvektorú, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő sík egyenlete $ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$

$\boxed{\text{Tétel}}$ $\underline{n}, P_0$ ugyanaz az $Q = (x_1, ~~x_1~~ y_1, z_1)$. A Q pont pontosan akkor van rajta a síkon, ha x_1, y_1, z_1 kielégíti az egyenletet.

$\boxed{\text{Biz}}$ $Q \in S \iff \underline{n} \perp \overrightarrow{PQ}$

$\overrightarrow{PQ} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$;

$\overrightarrow{PQ} \perp \underline{n} \iff \underline{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$

$\overrightarrow{PQ} \cdot \underline{n} = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$ax + bx + cx = ax_0 + by_0 + cz_0$

~~Egyenes~~ Egyenes

$\boxed{\text{Def}}$ Az e egyenes ~~irányvektorának nevezünk minden olyan vektort,~~ irányvektora $\underline{v}$, ha $\underline{v} \neq \underline{0}$ és $\underline{v} \parallel e$.

Az egyenest egyértelműen meghatározza 1 pontja és 1 irányvektora

Legyen $\underline{v}(a,b,c)$ az e egyenes irányvektora, $P_0(x_0,y_0,z_0)$ az e egyenes pontja. ~~Ekkor~~ $Q(x,y,z)$ Ekkor

$$Q \in e \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}: \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \underline{v} \iff (x,y,z) =$$
$$= (x_0, y_0, z_0) + \lambda (a, b, c)$$ Ebből

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a \\ y &= y_0 + \lambda b \\ z_0 &= z_0 + \lambda c \end{aligned}\right\}$$ az e egyenes egyenletrendszere.

Ebből kifejezve λ-t:

$$\lambda = \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}, \text{ ha } a,b,c \neq 0$$

Ha pl. $c=0$

$$\lambda = \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}, \quad z = z_0$$

3. Skaláris szorzat

- $\underline{a}(a_1,a_2,a_3)$, $|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

  Biz: a téglatest átlója

- $\underline{v} \cdot \underline{w} = |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cdot \cos(\sphericalangle(\underline{v},\underline{w})) = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$
- Ha $\underline{v} \perp \underline{w}$, akkor $\underline{v}\cdot\underline{w} = 0$, $\cos 90° = 0$!

  $$|OP|^2 + |OQ|^2 = |PQ|^2$$

4. Vektoriális szorzat

- 2 vektor szorzata vektor
- $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$
- $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin(\sphericalangle(\underline{a},\underline{b}))$, $a \times b \perp \underline{a}, \underline{b}$; jobbsodrású rendszerben
- Kiszámítása

$\underline{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b}(b_1, b_2, b_3)$

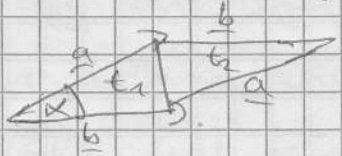
$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = +\underline{i}\underbrace{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}_{\lambda_1} - \underline{j}\overbrace{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}^{\lambda_2} + \underline{k}\overbrace{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}^{\lambda_3}$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = (\lambda_1, -\lambda_2, \lambda_3)$$

$a, b, c \in \mathbb{R}^3$ esetén a vegyesszorzat egy skalár, melyet úgy kapunk $\underline{a}\times\underline{b}\cdot\underline{c} = \underline{a}\times\underline{c}\cdot\underline{b} = \underline{b}\times\underline{c}\cdot\underline{a} = |\underline{a}\times\underline{b}|\cdot|\underline{c}|\cdot\cos(\varphi)$

3 vektor vegyesszorzatának abszolútértéke megegyezik az általuk kifeszített parallelepipedon térfogatával.

$\underline{a}\times\underline{b}$ az alap paralelogramma területe.



$$t_1 = \frac{|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cdot\sin(\alpha)}{2} = t_2$$

$$t_{paralelogramma} = t_1 + t_2 = |\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cdot\sin(\alpha) = |a\times b|$$

$|c|\cdot\cos(\varphi)$ a paralelepipedon magassága

Kiszámítása

$$\underline{a}\times\underline{b} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

$$(\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{c} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)(c_1, c_2, c_3) =$$

$$= \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 = c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & +c_2 & +c_3 \end{vmatrix}$$

- Vektortér def., köv., példák
- Altér, példák
- Lin. komb., gen. altér, generátor rendszer

1, Vektortér

$\boxed{\text{Def}}$ Egy tetszőleges nem üres halmaz, amelyen értelmezve van a skalárral való szorzás és az összeadás művelete úgy, hogy teljesülnek az axiómák:

Z_1: $\underline{v}, \underline{w} \in V \Rightarrow (\underline{v} \oplus \underline{w}) \in V$

Z_2: $\underline{v} \in V, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot \underline{v} \in V$

$Ö_1$: $\underline{v} \oplus \underline{w} = \underline{w} \oplus \underline{v}$

$Ö_2$: $(\underline{v} \oplus \underline{w}) \oplus \underline{x} = \underline{v} \oplus (\underline{w} \oplus \underline{x})$

$Ö_3$: $\exists\, \underline{0}$: $\underline{v} + \underline{0} = \underline{v}$

$Ö_4$: $\forall \underline{v}$-hez $\exists -\underline{v}$: $\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$

S_1: $\lambda(\underline{v} \oplus \underline{w}) = \lambda \underline{v} \oplus \lambda \underline{w}$

S_2: $(\lambda + \mu) \cdot \underline{v} = \lambda \underline{v} + \mu \cdot \underline{v}$

S_3: $\exists\, 1$: $1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$

S_4: $\mu \cdot (\lambda \cdot \underline{v}) = (\mu \cdot \lambda) \cdot \underline{v}$

- Köv a, $\boxed{\lambda \cdot \underline{0} = \underline{0}}$ $\quad Ö_3$

$\cancel{\lambda \cdot \underline{0} = \lambda \underline{0}}$ $\quad \lambda(\underline{v} \oplus \underline{0}) = \underline{v} \cdot \lambda \quad S_{2_1}$

$\cancel{\lambda \cdot (\underline{0} \oplus \underline{0}) = \underline{0}}$ $\quad \lambda \underline{v} \oplus \lambda \underline{0} = \underline{v} \cdot \lambda \quad / - \lambda \cdot \underline{v} \quad Ö_4$

$\lambda \underline{0} = \underline{0}$

b, $0 \cdot \underline{v} = 0$

$(0 + 0)\underline{v} = 0\underline{v} + 0\underline{v}$

$0\underline{v} = 0\underline{v} + 0\underline{v} \quad / - 0\underline{v}$

$\underline{0} = 0\underline{v}$

$\boxed{-1 \cdot \underline{v} = -\underline{v}}$

$0\underline{v} = (1+(-1))\underline{v}$

$\underline{0} = \underline{v} + (-1)\underline{v} \quad / -\underline{v}$

$-\underline{v} = (-1)\underline{v}$

4, $\lambda \cdot \underline{v} = 0 \Rightarrow \lambda = 0$, vagy $\underline{v} = \underline{0}$

i, $\lambda \neq 0$ ii, $\lambda = 0$

$\lambda \odot \underline{v} = \underline{0}$ $0 \cdot \underline{v} = \underline{0}$

$\frac{1}{\lambda} \odot (\lambda \odot \underline{v}) = \underline{0}$

$\underline{v} = \underline{0}$

2, Alterek

$\boxed{\text{Def}}$ Az $U \subseteq V$ a V vektortér altere, ha U is vektortér V műveleteivel.

Triv. altér: $U = \{\underline{0}\}$; $U = V$

Ha V vektortér, akkor $U \subseteq V$ akkor altere V-nek, ~~[illegible]~~ ha $\underline{v}, \underline{w} \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $(\underline{v} \oplus \underline{w}) \in U$ és $(\lambda \odot \underline{v}) \in U$.

$\ddot{O}_3$ és $\ddot{O}_4$-en kívül triviálisak

$\ddot{O}_3$: $\exists \underline{0}: \underline{0} + \underline{v} = \underline{v}$ $\ddot{O}_4$: $\forall \underline{v}\ \exists -\underline{v}$, $\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$

$0 \cdot \underline{v} = \underline{0}$ $\underline{v} \cdot (-1) = -\underline{v}$

3, Lin. komb.

$\boxed{\text{Def}}$ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4 \dots \underline{v}_n \in V$, $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$, akkor $\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n$ vektorok lin. kombinációja: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{v}_i$, vektorösszeg

$\boxed{\text{Def}}$ $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \dots \underline{v}_n$ generátuma a belőlük ~~[illegible]~~ kifejezhető összes vektor halmaza. Jele $\langle \underline{v}_1 \dots \underline{v}_n \rangle$

a) $\cancel{\underline{w}_1 \oplus \underline{w}_2}$ $W = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \ldots \underline{v}_n \rangle$, $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W$

$\underline{w}_1 \oplus \underline{w}_2 \in W$

$\underline{w}_1 = \lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n$

$\underline{w}_2 = \mu_1 \cdot \underline{v}_1 + \mu_2 \underline{v}_2 + \ldots + \mu_n \cdot \underline{v}_n$

$\underline{w}_1 \oplus \underline{w}_2 = (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) \cdot v_n \in \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \ldots \underline{v}_n \rangle$

Def $v_1, v_2 \dots v_n \in V$

v_1, v_2 lin. fgtlen, ha semelyik sem fejezhető ki a többi lin kombinációjaként.

Egyébként lin öf

Def $v_1, v_2, v_3 \dots v_n \in V$

lin fgtlenek, ha csak a triviális módon fejezhető ki belőlük a $\underline{0}$.

A kettő ekvivalens.

Biz: Indirekt $\Downarrow$

Tfh $\underline{0} = \lambda_1 \underline{v_1} + \lambda_2 \underline{v_2} \dots + \lambda_n \underline{v_n}$ $\quad \lambda_i \neq 0$

$$\underline{v_i} = \frac{\lambda_1}{-\lambda_i} \underline{v_1} + \frac{\lambda_2}{-\lambda_i} \underline{v_2} \dots + \frac{\lambda_n}{-\lambda_i} \underline{v_n} \quad ↯$$

Indirekt $\Uparrow$

Tfh $\underline{v_i} = \lambda_1 \underline{v_1} + \lambda_2 \underline{v_2} + \dots + \lambda_n \underline{v_n}$

$$\underline{0} = \lambda_1 \underline{v_1} + \lambda_2 \underline{v_2} + \dots + \lambda_n \underline{v_n} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} \underline{v_i} \quad ↯$$

Újonnan érkező vektor lemmája

$\left.\begin{array}{l} \underline{v_1}, \underline{v_2} \dots \underline{v_k} \text{ lin fgtlen} \\ \underline{v_1}, \underline{v_2} \dots \underline{v_k}, \underline{v_{k+1}} \text{ lin öf} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{v_{k+1}} \in \langle \underline{v_1}, \underline{v_2} \dots \underline{v_k} \rangle$

Kicserélési tétel

$\left.\begin{array}{l} \underline{f_1}, \underline{f_2} \dots \underline{f_n} \text{ lin fgtlenek} \\ \underline{g_1}, \underline{g_2} \dots \underline{g_m} \text{ lin öf} \end{array}\right\}$ $\forall f_i$-hez létezik $\underline{g_j}$, hogy f_i-t $\underline{g_j}$-re cserélve $\underline{f_1}, \underline{f_2} \dots \underline{f_n}, \underline{g_j}$ lin fgtlen

Biz Indirekt. Tfh $\nexists\, \underline{g_j} \Rightarrow \forall g_i \in \langle \underline{f_1}, \underline{f_2} \dots \underline{f_{i-1}}, \underline{f_{i+1}} \dots \underline{f_n} \rangle$, de $\underline{g_1}, \underline{g_2} \dots \underline{g_m}$ gen-rendszert, ezért $f_1 \dots f_{i-1}, f_{i+1} \dots f_n$ is, tehát $f_i \in \langle \underline{f_1} \dots \underline{f_{i-1}}, f_{i+1} \dots f_n \rangle$ ↯ lin fgtlenek

Tétel $|F| \leq |G|$

lin fgtlen — generátorrendszer

Biz: Kicsi. tétel értelmében $\forall f_i$-t kicsi. g_j-re, de mind kicserélhető g_j, mert ha azonos lenne, akkor lin öf lenne, akkor

$|F| \leq |G|$.

Def: V vektortérben $v_1, v_2, \ldots v_n$ bázis, ha
- lin fgtlenek
- generátorrendszer

Def: V vektortér, $b_1 \ldots b_n$ bázis, $\Rightarrow$ V dim. n

Tétel: V vektortérben B_1, B_2 bázis, akkor $|B_1| = |B_2|$.

Biz: ~~B_1 lin fgtlen és~~

B_1 lin fgtlen, B_2 gen. rendsz

$|B_1| \leq |B_2|$

B_1 gen. rendsz, B_2 lin fgtlen

$|B_1| \geq |B_2|$

$|B_1| = |B_2|$

IV. TÉTEL

x_1, x_2, x_n vált.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1\ a_{12}x_2 \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1\ a_{22}x_2 \dots = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1\ a_{m2}x_2 \dots = b_m \end{array}\right\} \text{lineár egy.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & \dots & b_m \end{array}\right)$$

Lépésenkénti át alakítás ~~~~

a – sor szorzása nem 0 számmal

b – egy sorhoz egy tetszőleges sor λ-szorosának hozzáadása

c – csupa 0 sor elhagyása

d – két sor cseréje

I. Fázis: lefelé seprés $a_{1,1}$-ről indulunk

(1) Ha $a_{i,j} \neq 0 \Rightarrow$ (2), ha $a_{i,j} = 0 \Rightarrow$ (5)

(2) a sort elosztom a_{ij}-vel

(3) ~~A sor alatti~~ $\forall k > i$ sorból kivonjuk az i. sor $a_{k,j}$ szeresét

(4) (1) lépés $a_{i+1,j+1}$-gyel

(5) Ha ~~~~ $\exists k > i$ sor, hogy $a_{k,j} \neq 0$, akkor a két sort cseréljük $\Rightarrow$ (2)

~~~~

~~(6)~~ ~~~~ Ha $\nexists \Rightarrow$ $\left(\begin{array}{c|c} 0 & \end{array}\right) \Rightarrow$ 2. Fázis

$\Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & \end{array}\right) \Rightarrow$ (1) lépés $a_{i,j+1}$

Ha ~~~~ ~~a sorokat~~ $\left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ 0 & \end{array}\right)$, vagy az alját $\left(\begin{array}{c|c} 0 & \end{array}\right) \Rightarrow$ 2 Fázis

II. Fázis felfelé seprés

lentről felfelé, jobbról balra a, b ~~~~ átalakítása

III. Eredmény kiolvasása

Egyértelmű: akkor 1 vezéregyes van csak a sorban, átlóval megjelölt

Szabad paraméter: ~~~~ amelyik oszlopban nincs 1-es

A többi változó függ a szabad paraméterektől
~~~~

Egy. <u>Van megoldás</u>, ha nincs tilos sor: tilos sor az, ahol a vonaltól balra csupa 0, viszont a vonal jobb oldalán 0-tól nem nulla van,

<u>Egyértelmű</u>: ~~RLA~~ végén főátlóban csupa 1-es van, Ø szabad paraméter

Egyenletek száma ≥ mint ismeretleneké, visszafelé nem igaz, mert lehetnek öf. egyenletek

<u>Végtelen sok</u>: Van szabad paraméter

V. TÉTEL

- Determinánsok, alaptul., számítás

Determináns: az $n \times n$-es mátrixokhoz hozzárendelünk egy valós számot

Permutáció: $[n]$ az $\{1, 2, \dots n\}$ halmaz $f: [n] \to [n]$ leképezése kölcsönösen egyértelmű. Permutációk halmaza $\Pi = (\Pi_1, \Pi_2 \dots \Pi_n)$

Pl.

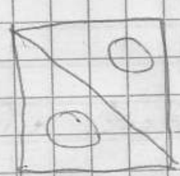
1	2	3	4	5	n
2	5	1	3	4	f_n

Inverziószám: ha $u_i > u_j$ és $f(u_i) < f(u_j)$ akkor inverzióban állnak. Az inverziószám a permutációban inverzióban lévő párok száma.

Π_i páros, ha $I(\Pi_i)$ páros, különben páratlan.

$$\det(A) = |A| := \sum_{\forall \Pi} (-1)^{I(\Pi)} \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\Pi(i)}$$

Tul.:

①  $\det(A) =$ főátlóban lévő számok szorzata

② Csupa 0 sor/oszlop: $\det(A) = 0$

③ Ha valamelyik sort/oszlopot szorozzuk λ-val,

$$\det(A) \to \det(A) \cdot \lambda$$

$\boxed{\text{Biz:}}$ $\forall$ sorból/oszlopból egy szorzatban csak 1 van benne, ezért λ is pontosan 1-szer szerepel minden szorzatban, ki lehet emelni

④ $$\begin{vmatrix} \alpha_{11}+\beta_{11} & \alpha_{12}+\beta_{12} & \dots \\ & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots \\ & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots \\ & & \end{vmatrix}$$

Szorzatokban megjelenik az $\alpha + \beta$

⑤ Két arányos sor $\Rightarrow \det(A)=0$

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_n \\ c_1 & c_2 & c_n \end{vmatrix}$$

Két sort megcseréljük det előjelet vált, de mátrixban a számok maradnak ua-zok,
~~det abs. értékben vált, csak előjel~~ $\det(A) = -\det(A)$
$\Downarrow$
$\det(A)=0$

⑥ Két sort cserélek $\det(A_1) \to -\det(A_2)$

$$\begin{vmatrix} i \\ j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i+j \\ j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i+j \\ -i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} j \\ -i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} j \\ i \end{vmatrix}$$

⑦ $$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \end{vmatrix}.$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \end{vmatrix} + \underbrace{\lambda \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \end{vmatrix}}_{0}}_{0}$$

$\det(A) = \det(A^T)$

$\boxed{\text{Biz}}$ a lásztyákat főátlóra tükrözzük a tornyanalatoknál együtt, így a sorrendekben ua a számok szerepelnek. Az inverziószám sem vált, mert ÉNY – DK marad ÉNY – DK, a ÉK – DNY is marad.

VI

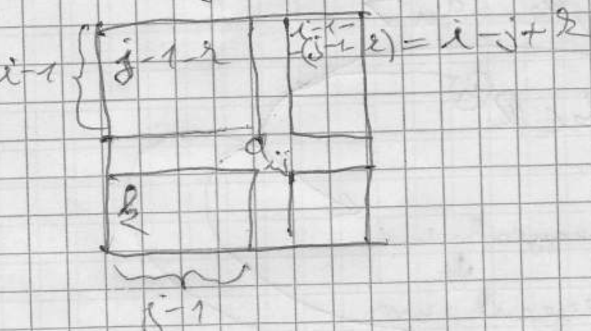
Kif. tétel

$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$ ← előjeles aldeterminánsa

Def Előjeles aldetermináns: Egy $n \times n$-es mátrix i. sorát és j. oszlopát elhagyjuk, ~~és~~ a kapott mátrix determinánsát megszorozzuk $(-1)^{i+j}$-vel.

Biz Egy sorából/oszlopából pontosan 1 tag szerepel ~~a szorzatokban~~ egy szorzatban ~~A szorzatokat csoportosítjuk,~~ ~~kiemelve belőlük~~ a sor/oszlop ~~elemeit, akkor megkapjuk~~

Csoportosítjuk a szorzatokat, i. sorából a_j. elemet tartalmazók. Kiemelve belőlük a_{ij}-t, az A_{ij}-ben szereplő szorzatokat ~~kapjuk~~. Előjel kérdéses.



Az inverziószám pontosan $i-j+2k$-val változik.

$i-j+2k$ páros $\Leftrightarrow$ $i-j$ páros $\Leftrightarrow$ $i+j$ páros

Def $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times k}$ $\Rightarrow$ összeadhatók

$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$A+B = B+A$

$(A+B)+C = A+(B+C)$

Def Szorzás λ-val: minden elemet megszorozzuk λ-val

Def Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times l}$, akkor A és B összeszorozható

$A \cdot B \in \mathbb{R}^{n\times l}$

$(A \cdot B)_{ij} = \underline{a}_i \cdot \underline{b}_j = \sum_{m=1}^{k} a_{ik} \cdot b_{jk}$

Ha a szorzás elvégezhető

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(B + C) A = BA + CA$$

$$\lambda (A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B$$

Szorzástétel $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

Ha $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$

ekvivalensek
1, $(A|b)$ megoldható
2, $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$
3, $b \in \langle a_1, a_2 \dots a_n \rangle$

Ha $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^{n}$

ekvivalensek
1, $(A|b)$ egyért. mo.
2, $(A|\underline{0})$ egyért. mo.
3, A oszlop. lin. ftlenek
4, A sorai lin. ftlenek
5, $\det(A) \neq 0$

$\det(A) = \det(A^T)$

Biz hát $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ oszlopai / sorai lin.

Ha $\det(A) \neq 0$, nem kelet-kezhet A-ban csupa 0 sor, így tilos sor sem $(A|b)$-ben.

egyenletek száma = ismeretlenek, mind lin. ftlenek

$\Rightarrow$ egyért. megoldható

VII TÉTEL

Def ~~A mátrix inverze~~ Inverz: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ -nek inverze az az $n \times n$-es X mátrix, ~~az~~ $A \cdot X = X \cdot A = E$

E egységmátrix

$X = A^{-1}$

~~Tétel~~ ~~Ha A -nak ... ∃~~

$AY = E$ ... $XA = E$ ... $Y \stackrel{?}{=} X$

Biz $X = XE = XAY = EY = Y$

TÉTEL $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\exists A^{-1} \iff \det \neq 0$

Biz $\Rightarrow$

$$E = AX \Rightarrow \det E = 1 = \underbrace{\det A \cdot \det X}$$

$\det A \neq 0$
$\det X \neq 0$

$\Leftarrow$

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = (e_1, e_2, \dots e_n)$$

$$X = (x_1, x_2 \dots x_n)$$

$$\left.\begin{aligned} A x_1 &= e_1 \\ A x_2 &= e_2 \\ &\vdots \\ A x_n &= e_n \end{aligned}\right\}$$ Egyértelműen megoldható $\Rightarrow$ 1 ilyen mátrix

$A \in \mathbb{R}^{k \times n}$

Def $r_s(A)$ = max lineárisan független sor

Def $r_o(A)$ = ——— " ——— oszlop

Def $r(A)$ = ~~...~~ A-ban maximális $k \times k$-as aldeterminánsok, melyben $\det \neq 0$

$\boxed{\text{Tétel}}$ $r_s = r_o = r_d$

$\boxed{\text{Biz}}$ ① Elég belátni $r_o = r_d$-t, mert

$$r_d(\underline{A}) = r_d(\underline{A}) = r_d(\underline{A}^T) = r_o(\underline{A}^T) = r_s(\underline{A})$$

② Gauss-eliminációval: sem r_o sem r_d-t nem változtatja meg

I. a szekvivalens átalakítások nem változtatják az oszlopok lin. ftlenségét.

II.
$$\begin{array}{ccccccccc} \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ? & ? & 0 & ? & 0 & 0 & ? \\ 0 & 1 & ? & ? & 0 & ? & 0 & 0 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ? & 0 & 0 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ? \end{pmatrix}$$

$r_o(\underline{A}) =$ vezéregyesek száma $= d(\underline{A})$

- Lin lek. fog., tul., pl.
- Lin lek. mátrix, vektor képének meghat.

V vektortér $B=\{\underline{b}_1, \underline{b}_2 \dots \underline{b}_n\}$ $\forall \underline{v} \in V$ $\underline{v}=\lambda_1 \cdot \underline{b}_1 \dots \lambda_n \cdot \underline{b}_n$

$[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ koordinátavektor

Lin. leképz.: V, W tetsz. vektorterek

A: $V \to W$ lek. fg lin. leképz. ha

- $A(\underline{u}+\underline{v}) = A(\underline{u}) + A(\underline{v})$ $\forall \underline{u}, \underline{v} \in V$
- $A(\lambda \cdot \underline{v}) = \lambda \cdot A(\underline{v})$

Lin. transzformáció $V=W$

$A(\underline{0}) = \underline{0}$

$\underbrace{A(\underline{0})}_{\text{ellenőrzés}} = A(0 \cdot \underline{0}) = 0 \cdot A(\underline{0}) = \underline{0}$

Tétel $A: V \to W$ lin. leképz. $b_1, b_2 \dots b_n$ adott bázis V-ben

Ha $\forall b_i$-re: $A(b_i) = w_i$ ismert, akkor

minden $\underline{v} \in V$-re $A(\underline{v})$ egyért. meghat.

$\boxed{\text{Biz.:}}$ $\underline{v} = \lambda_1 \cdot \underline{b}_1 + \dots + \lambda_n \cdot \underline{b}_n$

$A(\underline{v}) = A(\lambda_1 \underline{b}_1 + \dots + \lambda_n \cdot \underline{b}_n) = A(\lambda_1 \cdot \underline{b}_1) + \dots + A(\lambda_n \cdot \underline{b}_n) =$

$= \lambda_1 \underbrace{A(\underline{b}_1)}_{} + \dots + \lambda_n \cdot A(\underline{b}_n) =$

$= \lambda_1 \cdot \underline{w}_1 + \dots + \lambda_n \underline{w}_n = A(\underline{v})$

Lin. leképzés mátrixa $A(V \to W)$

$B = \{b_1, b_2 \dots b_n\}$ bázis V-ben

$C = \{c_1, c_2 \dots c_m\}$ bázis W-ben

A leképz. mátrixa B és C bázisokra nézve az az

$m \times n$-es mátrix, amelynek i oszlopa $[A(b_i)]_C$ $\forall i \in \{1, 2 \dots n\}$

Tétel $A: V \to W$ lin. leképz. $B = \{b_1, b_2 \dots b_n\}$, $C \{c_1, \dots c_n\}$

$\forall \underline{v} \in V$-re

$$[A(v)]_C = [A]_{B,C} \cdot [v]_B \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} [v]_B$$

$\boxed{\text{Biz}}$

$$[A]_{BC} \quad m \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \dots \lambda_n \cdot a_n$$

$$\underline{v} = \lambda_1 \underline{b}_1 + \dots + \lambda_n \underline{b}_n$$

$$A(\underline{v}) = A(\lambda_1 \underline{b}_1 + \dots + \lambda_n \underline{b}_n) = A(\lambda_1 \underline{b}_1) + \dots + A(\lambda_n \underline{b}_n) =$$

$$= \lambda_1 A(b_1) + \dots + \lambda_n A(b_n)$$

$$[A(\underline{v})]_C = [\lambda_1 \cdot A(\underline{b}_1) + \dots + \lambda_n A(b_n)]_C = \lambda_1 \underbrace{[A(b_1)]_C}_{a_1 \text{ def szerint}} + \dots + \lambda_n [A(b_n)]$$

Def U, V, W vektorterek A, B, C bázisok

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{A}: U \to V \\ \mathcal{B}: V \to W \end{array}\right\} \text{lin leképz.}$$

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}(\underline{u})) = \underbrace{(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})}_{\text{kompoz.}}(\underline{u}) : U \to W \text{ bever. lin leképz.}$$

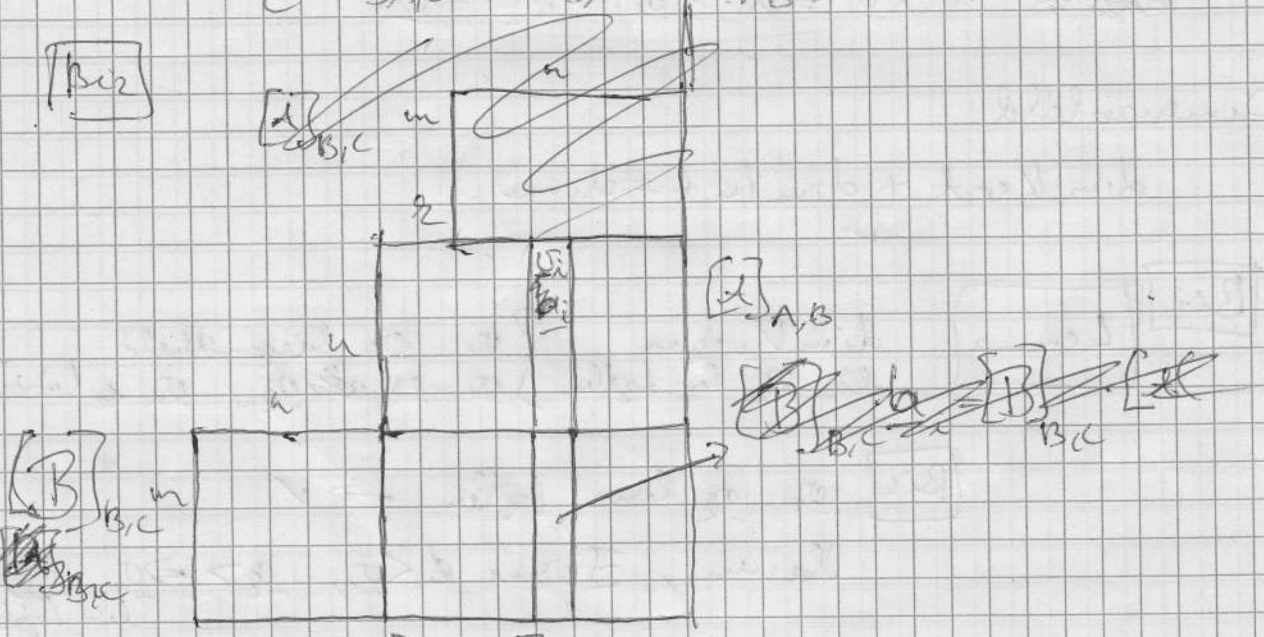
Biz 1. $(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(\underline{u}+\underline{v}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\underline{u}+\underline{v})) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\underline{u}) + \mathcal{A}(\underline{v})) =$
$= \mathcal{B}(\mathcal{A}(\underline{u})) + \mathcal{B}(\mathcal{A}(\underline{v})) = (\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(\underline{u}) + (\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(\underline{v})$

2. $(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(\lambda \underline{v}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\lambda \cdot \underline{v})) = \mathcal{B}(\lambda \cdot \mathcal{A}(\underline{v})) = \lambda \cdot \mathcal{B}(\mathcal{A}(\underline{v}))$
$= \lambda \cdot (\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(\underline{v})$

Tétel

$$[\mathcal{B} \circ \mathcal{A}]_{A,C} = [\mathcal{B}]_{B,C} \cdot [\mathcal{A}]_{A,B}$$

Biz



$$\underline{v}_i = [\mathcal{A}(\underline{a}_i)]_B$$

$$[\mathcal{B}]_{B,C} \cdot \underline{v}_i = [\mathcal{B}]_{B,C} \cdot [\mathcal{A}(a_i)]_B = [\mathcal{B}(\mathcal{A}(a_i))]_C \cancel{= (\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(a_i)}$$

def szerint

~~$[\mathcal{B} \circ \mathcal{A}]_{A,C}$ i oszlop~~

$$[(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(a_i)]_C$$

$\boxed{\text{Def}}$ $A: V \to W$ lin. leképezés

$\mathrm{Im}\,A = \{ \underline{w} \in W : \exists \underline{v} \in V, \text{ hogy } A(\underline{v}) = \underline{w} \}$

$\mathrm{Ker}\,A = \{ \underline{v} \in V \text{ és: } A(\underline{v}) = \underline{0} \}$

$\boxed{\text{Tétel}}$ $\mathrm{Im}\,A \leq W$, $\mathrm{Ker}\,A \leq V$ altérek

$\boxed{\text{Biz}}$ ① $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in \mathrm{Im}\,A$

$A(\underline{v}_1) = \underline{w}_1$

$A(\underline{v}_2) = \underline{w}_2$

$\underline{w}_1 + \underline{w}_2 = A(\underline{v}_1) + A(\underline{v}_2) = A(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) \in \mathrm{Im}\,A$

$\lambda \underline{w}_1 = \lambda \cdot A(\underline{v}_1) = A(\lambda \underline{v}_1) \in \mathrm{Im}\,A$

② $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \mathrm{Ker}\,A$

$A(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = A(\underline{v}_1) + A(\underline{v}_2) = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$

$A(\lambda \underline{v}_1) = \lambda \cdot A(\underline{v}_1) = \lambda \underline{0} = \underline{0}$

Dimenziótétel:

$\dim \mathrm{Ker}\,A + \dim \mathrm{Im}\,A = \dim V$

$\boxed{\text{Biz}}$ $\boxed{\text{Lemma}}$ $\left.\begin{array}{l}\dim V \text{ véges} \\ \underline{v}_1 \dots \underline{v}_k \text{ lin. ftlen}\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}\underline{v}_1 \dots \underline{v}_k \text{ kiegészíthető} \\ \underline{v}_1 \dots \underline{v}_k, \underline{v}_{k+1} \dots \underline{v}_n \text{ bázissá.}\end{array}$

$\boxed{\text{Biz}}$ $\underline{v}_1 \dots \underline{v}_k$ lin. ftlen $\to V$

Ha nem, $\exists\, \underline{v}_{k+1} \notin \langle \underline{v}_1, \dots \underline{v}_k \rangle \Rightarrow \underline{v}_1 \dots \underline{v}_{k+1}$ lin. ftlenek,

mivel $\dim V$ véges ezért előbb utóbb

Legyen $b_1, \dots b_k$ bázis $\mathrm{Ker}\,A$-ban $\to$ kiegészíthető V-ben

$\dim \mathrm{Ker}\,A = k$ $\dim V = k + m$

$b_1, \dots b_k, c_1 \dots c_m$ bázis V-ben

állítás: $A(c_1), \dots A(c_m)$ bázis $\mathrm{Im}\,A$-ban

1, $A(c_1) \dots A(c_m)$ gen. vendszer

$\underline{w} \in \operatorname{Im} A \Rightarrow \underline{w} = A(\underline{v})$

$\underline{v} \in V \Rightarrow \underline{v} = \beta_1 \cdot b_1 + \dots + \beta_k \cdot b_k + \gamma_1 \cdot c_1 + \dots + \gamma_m c_m$

$\underline{w} = A(\underline{v}) = A(\beta_1 b_1 \dots \gamma_m \cdot c_m) = \beta_1 \underbrace{A(b_1)}_{\underline{0}\text{, mert } b_1 \in \operatorname{Ker} A} + \beta_2 A(b_2) + \dots \gamma_1 A(c_1) + \dots + \gamma_m A(c_m)$

2. $A(c_1) \dots A(c_m)$ lin. fgtlen

$\gamma_1 \cdot A(c_1) + \dots + \gamma_m A(c_m) = \underline{0} = A(\gamma_1 \cdot c_1) + \dots + A(\gamma_m c_m) = \underline{0} = A(\gamma_1 c_1 \dots \gamma_m c_m)$

$\Downarrow$

$\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_m c_m \in \operatorname{Ker} A$

$\underline{b_1}, \dots \underline{b_k}$ bázis $\operatorname{Ker} A \Rightarrow \gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_m c_m = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_k b_k$

$\underbrace{\gamma_1 c_1 + \dots \gamma_m c_m - \beta_1 b_1 - \dots - \beta_k b_k}_{\text{bázis } V\text{-ben}} = \underline{0}$

bázis V-ben $\Rightarrow \gamma, \beta = 0$

~~lin. fgtlen $\Rightarrow$~~

$\gamma_1 A(c_1)$

X TÉTEL

Lin. transf. ~~H~~ Ha a lin leképezés ua. a vektortérbe viszi

<u>Sajátvektor</u> $\mathcal{A}: W \to W$ lin trafó, $\underline{v} \in W$ s. vektora $\mathcal{A}$-nak, ha $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, hogy $\mathcal{A}(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$ és $\underline{v} \neq \underline{0}$

Sajátérték: $\lambda \in \mathbb{R}$ az $\mathcal{A}$ s. értéke, ha $\exists\, \underline{v} \in W$ $(\underline{v} \neq \underline{0})$ és

$\mathcal{A}(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v}$

Tétel $\mathcal{A}: V \to V$ lin. transzf. λ s. ért. $\mathcal{A}$-nak

$W: \{\underline{v} : \underline{v} \in V, \underline{v}$ λ-hoz tartozó s. vektor$\} \cup \{\underline{0}\}$ mindig altér lin V-ben

Biz $\underline{u}, \underline{w} \in V \Rightarrow \underline{u} + \underline{w} \in V$

$$\mathcal{A}(\underline{u}) = \lambda \cdot \underline{u}$$
$$+ \quad \mathcal{A}(\underline{w}) = \lambda \cdot \underline{w}$$
$$\mathcal{A}(\underline{u} + \underline{w}) = \lambda(\underline{u} + \underline{w})$$

$$\lambda \cdot \underline{u} \in V$$
$$\mathcal{A}(\underline{u}) = \lambda \cdot \underline{u}$$
$$\mu \cdot \mathcal{A}(\underline{u}) = \lambda \cdot \mu \cdot \underline{u}$$
$$\mathcal{A}(\mu \underline{u}) = \lambda(\mu \cdot \underline{u})$$

Def $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ | $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ s. vekt. M-nek, ha $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, hogy $\underline{\underline{M}} \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$ és $\underline{v} \neq 0$

$\lambda \in \mathbb{R}$ ~~saj~~ s. ért. M-nek, ha $\exists\, \underline{v} \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, hogy

$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$

Tétel $\mathcal{A}: V \to V$ lin transzf. $B = \{b_1, \ldots b_n\}$ bázis V-ben

λ s. ért $\mathcal{A}$-nak $\Longleftrightarrow$ λ s. ért. $[\mathcal{A}]_B$-nek

$\underline{v}$ s. vekt. $\mathcal{A}$-nak $\Longleftrightarrow$ $[\underline{v}]_B$ s. vekt. $[\mathcal{A}]_B$-nek

$\boxed{\text{Biz}}$ $A(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$ $\quad \underline{v} \neq \underline{0}$

$$\Updownarrow$$

$$[A(\underline{v})]_B = [\lambda \cdot \underline{v}]_B \iff [A]_B \cdot [\underline{v}]_B = \lambda [\underline{v}]_B$$

$\boxed{\text{Tétel}}$ $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λ sa. ért. M-nek $\iff \det(M - \lambda E) = 0$

$\boxed{\text{Biz}}$ λ s. ért $\iff \exists\, \underline{v} \neq 0 : M \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$

$$M \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v} = \lambda \cdot (E \cdot \underline{v}) = (\lambda \cdot E) \cdot \underline{v}$$ mivel $\underline{v}$ saj. ért. $\Rightarrow \underline{v} \neq 0$

$$(M - (\lambda \cdot E)) \cdot \underline{v} = \underline{0}$$

$$\Downarrow$$

$(M - \lambda E)$ oszlopai öf $\Rightarrow$

$\det(M - \lambda E) = 0$

M négyzetes $\Rightarrow \det(M - \lambda \cdot E) \neq 0$

akkor $\left(M - \lambda E \,\middle|\, \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right)$ megoldható $\Rightarrow$ egyértelmű,

XI

Komplex számok halmaza $\mathbb{C} := \{a+bi : a, b \in \mathbb{R}\}$

a: valós rész $Re(z)$

b: képz. rész $Im(z)$

i: $\sqrt{-1}$, $i^2 = -1$

Tétel $a+bi = c+di \iff a=c \quad b=d$

Biz

$$a+bi = c+di$$

$$a-c = \cancel{b-d}\,(d-b)i$$

$$\underbrace{\underset{\geq 0}{(a-c)^2} = ((d-b)i)^2 = \underset{\leq 0}{-(d-b)^2}}$$

$\Downarrow$

$a-c=0 \qquad d-b=0$

$a=c \qquad d=b$

Alapműveletek

$+$: $(a+bi)+(c+di) = a+c+(b+d)i$

$-$: $(a+bi)-(c+di) = a-c+(b-d)i$

$\cdot$: $(a+bi)(c+di) = \quad = (ac-bd)+(ad+cb)i$

$:$ $\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c-di)(c+di)}$

Def konjugált $z = a+bi$
$\bar{z} := a-bi$

Abszolútérték $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\cdot\bar{z}}$

Tételek $\overline{z\cdot w} = \bar{z}\cdot\bar{w}$

$|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$

$\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}$

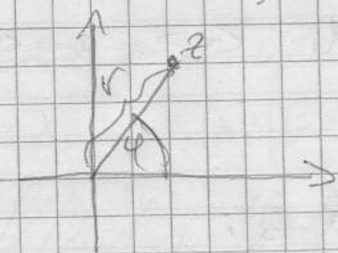
$\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$

Trig. alak

$r = |z|$ ~~...~~ $\varphi = \arg z$ $0 \le \varphi \le 2\pi$

$\arg z :=$ valós tengely pozitív félegyenesével bezárt szög

$z = r(\cos\varphi + \sin\varphi \cdot i)$



$z = r(\cos\varphi + \sin\varphi\, i)$ $w = s \cdot (\cos\psi + \sin\psi \cdot i)$

$z \cdot w = r \cdot s(\cos(\varphi + \psi) + \sin(\varphi + \psi) \cdot i)$

$\frac{z}{w} = \frac{r}{s}(\cos(\varphi - \psi) + \sin(\varphi - \psi)\, i)$

$z^n = r^n(\cos(n \cdot \varphi) + \sin(n \cdot \varphi)\, i)$

Gyökvonás $z = w^n$ $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$,

$w^n = s^n(\cos(n \cdot \psi) + \sin(n \cdot \psi) \cdot i)$

$r = s^n$ $\varphi = n \cdot \psi - k \cdot 2\pi \Rightarrow \psi = \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}$

$\sqrt[n]{r} = s$

$w = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) i\right)$

$k \in \{0, 1, 2 \dots n-1\}$

$\sqrt[n]{1} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) i$ $k = 0, 1 \dots n-1$

$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + \sin\frac{2k\pi}{n} i$ szabályos n-szög csúcsai

1 szogmaz, amiző középpontot lesz vajta

$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n = 0$

$2i\pi + 2\pi$

Biz $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_i$ $\frac{2\pi}{n} + \frac{2(i-1)\pi}{n} = \frac{2\pi(i+1)}{n}$

XII

Ismétlés nélküli leszámlálások

Permutáció: n különböző elem sorbarendezése $n!$ (verseny eredménye)

Variáció: n különbözőből ~~választ~~ kiválasztunk k darabot, számít a sorrend
1. 3 díj kiosztás $\frac{n!}{(n-k)!}$

Kombináció: n különbözőből k darab kiválasztása, sorrend nem számít
$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k}$ lottó

Ismétléses

Permutáció: n elem, ezekből $k_1 \dots k_n$ azonos, ezek sorbarendezése.

$\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!}$ 2 piros alma, 3 sárga. Hány féle képpen?

Variáció: n elem, ezekből k darabot, kivehetjük azokat, sorrend számít: n^k
Pl. 3 hosszú totó, lottó

Kombináció: n elemből k-t választunk, ~~egy fajtából többet is lehet~~ azonos, sorrend nem számít
5 váza, 8 szál virág

$\binom{n+k-1}{k}$

$\binom{0}{0}$ 0.

i-re $\binom{i}{0}$ $\binom{i}{1}$ … $\binom{i}{i}$

$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$ 1.

$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$ 2.

Binomiális tétel: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k} b^{n-k}$

$(a+b)(a+b)\dots(a+b)$

n zárójelből k-ból választok a-t, ezt $\binom{n}{k}$ féle képpen, maradék $(n-k)$-ból b-t, tehát $a^k b^{n-k}$ szorzat $\binom{n}{k}$ féle képpen jöhet ki.

zatorreg $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(1)^{i}\cdot(1)^{n-i} = (1+1)^{n} = 2^{n}$

$\downarrow$

Pascal Δ za n. vrsta

$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i} = 0 = (1-1)^{n}$

XIII. Tétel

Def injektív: $f: A \to B$ $\forall x, y \in A$ $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

szürjektív: $f: A \to B$ $\forall x \in B$-re $\exists y \in A$ $f(y) = x$

bijektív = injektív és szürjektív

Def $|A| = |B|$, ha $\exists f: A \to B$: f bijektív (párba rendez)

$|A| \leq |B|$ ha $\exists f: A \to B$: f injektív

$|A| < |B|$ ha $|A| \leq |B|$, de $|A| \neq |B|$

Tétel Cantor - Bernstein tétel

Ha $|A| \leq |B|$ és $|A| \geq |B| \Leftrightarrow |A| = |B|$

Def A H halmaz megszámlálhatóan végtelen, ha $|H| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$, azaz sorbarendezhető

Def H kontinuum számosságú, ha $|H| = |\mathbb{R}| = c$

Tétel $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$

Biz $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}| \Leftrightarrow \overset{H=}{[0,1]} > |\mathbb{N}|$

Indirekt: TFH H megszámlálhatóan végtelen, tehát elemeit sorba tudjuk rendezni.

$v_1 = 0, v_{11} v_{12} \ldots$

$v_2 = 0, v_{21} v_{22} \ldots$

$\vdots$

$x = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots$ $\quad x_k = \begin{cases} 1, & \text{ha } v_{kk} \neq 1 \\ 2, & \text{ha } v_{kk} = 1 \end{cases}$

x különbözik v_i-től x_i-ben, tehát nem a felsorolásban $\lightning$

Tétel $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$

Biz $x \in \mathbb{Z}$ $f\,x = \left.\begin{cases} 2x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -2x-1, & x < 0 \end{cases}\right\}$ bijektív ✓

$\boxed{\text{Tétel}}$ $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$

$$\begin{array}{ccc} 1/1 & 1/2 & 1/3 \\ 2/1 & 2/2 & 2/3 \\ 3/1 & 3/2 & 3/3 \end{array}$$

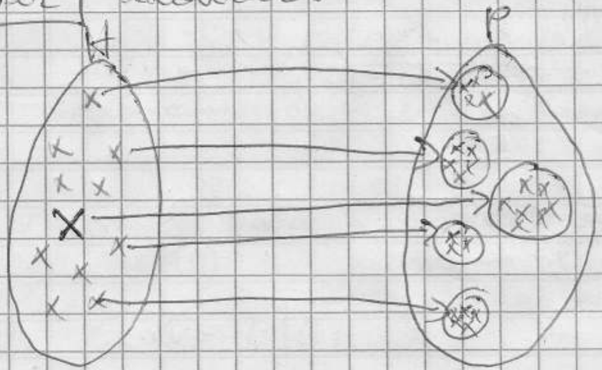
ha ismétlődőket elhagyjuk,
elejére a 0-t, és minden szám után
odaírjuk -1 szeresét

XIV

$\boxed{\text{Def}}$ $P(H) = \{A : A \subseteq H\}$

Cantor-tétel $|H| < |P(H)|$ $\forall H$ halmaz

$\boxed{\text{Biz}}$ indirekt $|H| \neq |P(H)|$



I. eset x kék $\Rightarrow x \in f(x) \Rightarrow x$ piros ↯

II. eset x piros $\Rightarrow x \notin f(x) \Rightarrow x$ kék ↯

② $f: x \to \{x\}$ injektív $\Rightarrow |H| \leq |P(H)|$

$|P(\mathbb{N})| = c = |\mathbb{R}|$

0,1 sor. függv.

$$\begin{array}{l|ccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \text{prímek} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \text{páratlan} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \{0,5,7\} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

részhalmazok — sorozatok

$|\{\text{sorozatok}\}| = |P(\mathbb{N})| = |[0,1]| = |\mathbb{R}|$

$\left\{\begin{array}{l} |P(\mathbb{N})| \leq |[0,1]| \Leftarrow \text{minden sorozat elé } 0,\text{-t injektív} \\ |P(\mathbb{N})| \geq |[0,1]| \quad \text{binárisan kódolom } [0,1]\text{-et, mind egy halmazt jelöl injektív} \end{array}\right.$

$\Downarrow$

$|P(\mathbb{N})| = |[0,1]|$

Kontinuum-hipotézis

$\exists$ e H: $|\mathbb{N}| < |H| < |\mathbb{R}|$

nem lehet cáfolni sem a halmazelmélet axiómáival, de bizonyítani sem

XV. TÉTEL

Def Gráf: V: ~~tetszőleges~~ pontok véges halmaza
E: V pontokban ~~...~~ 2 elemű részhalmazainak részhalmaza

A V, E párt gráfnak nevezzük, jele $G(V,E)$

Def Egyszerű gráf: nincs hurok- és t-él $V = V(G)$, $E = E(G)$

Def v csúcs foka $d(v)$: ~~...~~ a v-t végpontként élek száma, hurokél 2-szer

$\forall G$-re $\sum d(v) = 2 \cdot |E|$

Biz 1 él $\Rightarrow$ 2 végpont

Def G(V,E) egyszerű gráf kompl. $\bar{G}$: $V(\bar{G}) = V(G)$
$E(\bar{G}) = \{\{u,v\} : u,v \in V(G)$ és $\{u,v\} \notin E(G)\}$

Def Teljes gráf: n csúcs, $\forall$ 2 pont között van él, ezek élek száma $\binom{n}{2}$ jele K_n

Def G_1, G_2 izomorfak, ha $\exists\ f: V(G_1) \to V(G_2)$, hogy
$\forall u, v \in V(G_1)$ szomszédjai k darab él mentén, ~~akkor~~
$\Leftrightarrow$ $f(u)$ és $f(v)$ is k db él mentén határos

Def Részgráf: $G(V,E)$ részgráfja $H(V', E')$, ha $V' \subseteq V$, és
$\forall e \in E'$ esetén $e = \{u,v\} \Rightarrow u, v \in V'$ és $e \in E$

Def Feszített részgráf: $G(V,E)$ feszített részgráfja $H(V',E')$, ha
$V' \subseteq V$, és $\forall u, v \in V'$ esetén
$\{u,v\} \in E' \Leftrightarrow \{u,v\} \in E$

Def ~~Összefüggő gráf: bármely két ... pontja között van ... 2 ... élsorozat~~

Élsorozat: $\{v_0, e_1, v_1, e_2, v_2 \dots\}$
$\forall e_i$-re $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ és $e_i \in E(G)$
$\forall v_i$-re $v_i \in V(G)$

[Def] Út olyan élsorozat, amelyben a csúcsok nem ismétlődnek.

[Def] Séta olyan — " —, amelyben a csúcsok — " —

[Def] Kör olyan — " — melynek kezdő- és végpontja ua.

[Def] Gráf összefüggő, ha bármely két pontja között van út.

[Def] összefüggő komponens $K \subseteq V(G)$ a gráf komp., ha $u, v \in K$ között $\exists$ út, de nem $\forall$ út ha $u \in K$, $v \in V(G) \setminus K$.

[Def] ~~H összefüggő komponense G-nek, ha~~

~~- H feszített részgráfja G-nek~~

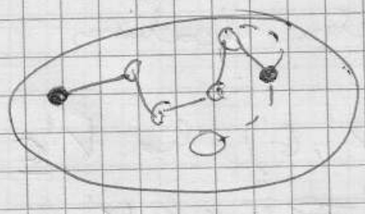
- H feszített részgráfja G-nek
- H összefüggő
- H-hoz ~~bármely~~ bármely további csúcsot hozzávéve a feszített részgráf nem összefüggő

[Def] Fa: összefüggő gráf és nincs benne kör

[Def] Levél: fa csúcsa, $d(v) = 1$

[Tétel] Minden legalább 2 csúcsú fának van legalább 2 levele.

[Biz] vegyük a leghosszabb utat



~~Két végpont foka 1~~

Indirekt.

T.f.h. 2 végpont foka > 1

I él vezet egy másik csúcsba → nem leghosszabb út ↯

II Útban levő csúcsba vezet → kör → nem fa ↯

[Tétel] n csúcsú és e élű fában $e = n-1$

$n = e+1$

Biz hagyjuk el az 1. fokú csúcsokat és hozzátartozó élt, amíg 1 csúcsú fát nem kapunk.

ekkor ~~...~~ $n-e$ állandó, mert egyszerre 1 élt és 1 csúcsot hagyunk el, a végén pedig $n = e+1$-et kapunk

Def F feszítőfája G-nek, ha

1, F fa

2, F részgráfja G-nek

3, $V(F) = V(G)$

Tétel G-nek $\exists$ feszítőfája $\Leftrightarrow$ G összefüggő

Biz $\Rightarrow$ ✓

$\Leftarrow$

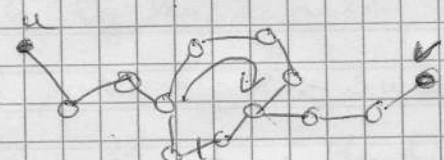
Lemma G öf, G egy köréből tetszőleges élt törölve G' is öf

Biz - u, v tetszőleges G-ben

- P élsorozat $u \to v$ ha

- nincs kör P-ben $\to$ OK

- van $\to$ kerülőút



amíg van kör

$G \to G' \to G'' \to \dots \to F$ marad összefüggő és körmentes

XVI. TÉTEL

Def G gráf síkbarajzolható, ha ~~kozgy~~ lerajzolható a síkban úgy, hogy az élek a csúcsokon kívül nem metszik egymást.

~~Kazt~~ **Tétel** G síkbarajzolható $\Longleftrightarrow$ G gömbrerajzolható.

Biz Sztereografikus projekció: bijektív

Tétel Euler tétel

Ha egy összefüggő n csúcsú, e élű, t tartományú gráf síkbarajzolható, akkor $e = n + t - 2$

Biz fejelés

Tétel ha G ~~lg~~ leg. 3 pontú, egyszerű síkbarajzolható gráf, akkor $e \leq 3n - 6$

Biz Legyen k_i az i. tart. határoló élek száma

$$2e = k_1 + k_2 \dots k_i \geq 3t = (e - n + 2) \cdot 3$$

Euler tétel

minden tart. min. 3 élhatár

$$2e \geq 3e - 3n + 6$$

$$3n - 6 \geq e$$

Def G és H top. izomorf, ha H megkapható G-ből a következő lépésekkel ~~sz~~ alkalmazva.

1, törlünk ~~élt~~ egy $d=2$ csúcsot és szomszédait összekötjük

2, törlünk 1 ~~él~~ uv élt, és beszúrunk egy $d=2$ csúcsot, ami szomszédos u-val és v-vel.

Tétel ~~Ha~~ $K \subseteq G$

G síkbarajzolható $\Longleftrightarrow$ G nem tart. K_5 vagy $K_{3,3}$-mal top. izomorf részgráfot

B.Ő. Ha G síkbarajz, akkor minden H részgráfja is. Ha H sr. és top. izomorf K-val akkor K is sr. Így $K = K_5$ vagy $K = K_{3,3}$ nem lehet végig ha G s.r. volt.

Tétel Ha G síkbarajzolható egyszerű gráf $\Rightarrow$ G úgy is sr., hogy élei egyenes szakaszok

Def $G = (V, E)$ sr. gráf, legyen V^* G tart. ~~élei~~ halmaza, $G^* = (V^*, E^*)$ a G duálisa ahol $E^* = \{e^* : e \in E\}$ és e^* az e-t határoló tartományokat összekötő él.

Gráf	duális
tart / élek	csúcsok / élek
kör	vágás
vágás	kör
párhuzamos él	soros él
elvágó él	hurokél
ha	ha komplementere

$Q \subseteq E$ vágás, ha $G - Q$ nem öf, de $X \subset Q$ esetén $G - X$ öf.

$\underline{0}\lambda=\underline{0}$

$\lambda(\underline{v}+\underline{0})=\lambda\cdot\underline{v}$

$\lambda\underline{v}+\lambda\underline{0}=\lambda\cdot\underline{v}$

$\lambda\underline{0}=\underline{0}$

$0\cdot\underline{v}=\underline{0}$

$(0+0)\underline{v}=0\underline{v}$

$0\underline{v}+0\underline{v}=0\underline{v}$

$0\underline{v}=\underline{0}$

$\lambda\cdot\underline{v}=\underline{0}$

$\lambda=0 \qquad \underline{v}=0$

$-1\,\underline{v}=-\underline{v}$

$0\underline{v}=(1+(-1))\underline{v}$

$0\underline{v}=1\underline{v}+(-1)\underline{v} \qquad /-\underline{v}$

$-\underline{v}=(-1)(\underline{v})$

$\frac{2k\pi}{n}+\frac{2(k+1)\pi}{n}=\cancel{\frac{2\pi}{n}(k+k+1)}$