ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak

II. ZÁRTHELYI pótlása, javítása

2010. ápr. 29.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (14 pont)

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x-10}{\sqrt{x^2-4x+4}} = ?$

b) Mutassa meg, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \sin 5x$$

nem létezik!

a.) $\boxed{7}$ $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+5)}{\sqrt{(x-2)^2}} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{|x-2|}(x+5)$

$\lim\limits_{x\to 2+0} \underbrace{\dfrac{x-2}{x-2}}_{=1}(x+5) = 7$; $\lim\limits_{x\to 2-0} \underbrace{\dfrac{x-2}{-(x-2)}}_{=-1}(x+5) = -7$

Mivel nem egyeznek meg, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{|x-2|}(x+5) \nexists$.

b) $\boxed{7}$ $f(x) := \sin 5x$

$5x = n\pi \Rightarrow x_n^{(1)} := n\frac{\pi}{5} \to \infty : f(x_n^{(1)}) = \sin n\pi = 0 \to 0$

$5x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \Rightarrow x_n^{(2)} = \frac{\pi}{10} + n\frac{2\pi}{5} \to \infty : f(x_n^{(2)}) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1 \to 1 \neq 0$

$\xrightarrow[\text{átviteli elv}]{} \lim\limits_{x\to\infty} \sin 5x \nexists$

2. feladat (10 pont)

a) Írja fel a differenciálhányados definícióját az értelmezési tartomány belső x_0 pontjában!

b) A derivált definíciójával határozza meg az

$$f(x) = \sqrt{3x+2}$$

függvény deriváltját az $x_0 = 1$ pontban!

a.) $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ 2

b.) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{3(1+h)+2} - \sqrt{5}}{h} =$ 2

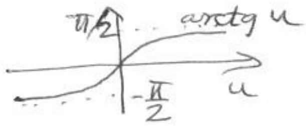
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5+3h}-\sqrt{5}}{h} \cdot \frac{\sqrt{5+3h}+\sqrt{5}}{\sqrt{5+3h}+\sqrt{5}} \quad (2) \quad = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{5}+3h-\cancel{5}}{h\left(\sqrt{5+3h}+\sqrt{5}\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{h}{h}}_{=1} \frac{3}{\sqrt{5+3h}+\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}} \quad (4)$$

3. feladat (22 pont)

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{3}{x-5}$$

a) Hol és milyen típusú szakadása van a függvénynek? (Indokoljon!)
b) Írja fel $f'(x)$-et, ahol az létezik!
c) Adjon meg egy intervallumot, melyen f invertálható! (Indokoljon!)
$f^{-1}(x) = ?$, $D_{f^{-1}} = ?$



a.) szakadási hely: $x=5$ (1)

$\boxed{6}$

$$\lim_{x\to 5+0} \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{3}{x-5}}_{+\infty} = \frac{\pi}{2} \quad (2) \qquad x-5 \to +0$$

$$\lim_{x\to 5-0} \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{3}{x-5}}_{-\infty} = -\frac{\pi}{2} \quad (2) \qquad x-5 \to -0$$

elsőfajú szakadás van (véges ugrás) (1)

b.) Ha $x \neq 5$:

$\boxed{5}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{3}{x-5}\right)^2} \cdot 3 \cdot \frac{-1}{(x-5)^2}$$

c.) Ha $x > 5$: $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ szigorúan mon. csökken

$\boxed{11}$ $\Rightarrow \exists f^{-1}$ $(5,\infty)$-en (2)

$$y = \operatorname{arctg} \frac{3}{x-5} \quad ; \quad x \in (5,\infty)$$

$$\frac{3}{x-5} = \operatorname{tg} y \Rightarrow x = 5 + \frac{3}{\operatorname{tg} y}$$

$$f^{-1}(x) = 5 + \frac{3}{\operatorname{tg} x} \quad (4)$$

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{3}{x-5}}_{\to 0} = \operatorname{arctg} 0 = 0$$ és $f(5+0) = \frac{\pi}{2}$ volt

Ha tehát $x \in (5,\infty)$: $f(x) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ f szig. monotonitás miatt

$D_{f^{-1}} = R_f = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ a fentiek miatt.
(5)

an1z2p100429/2.

4. feladat (16 pont)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(5x^2)}{3x^2}, & \text{ha } x > 0 \\ x\, e^{-\frac{1}{(x+8)^2}}, & \text{ha } x \le 0 \end{cases}$$

a) A jobb és bal oldali határértékek megállapítása után döntse el, hogy hol és milyen típusú szakadása van a fenti függvénynek!

b) Írja fel $f'(x)$-et, ahol az létezik!

a) $D_f: x \neq -8$

$\boxed{8}$

$$\lim_{x\to -8} \underbrace{x}_{\downarrow \atop -8} \underbrace{e^{-\frac{1}{(x+8)^2}}}_{\downarrow \atop 0} = 0 \quad -\frac{1}{(x+8)^2} \to -\infty \ \left(-\frac{1}{+0} \text{ alakú}\right)$$

: megszüntethető szakadás (elsőfajú szakadás)

Vizsgálandó még: $x=0$

$$f(0+0) = \lim_{x\to 0+0} \frac{\sin 5x^2}{3x^2} = \lim_{x\to 0+0} \underbrace{\frac{\sin 5x^2}{5x^2}}_{\to 1} \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

$$f(0-0) = f(0) = x e^{-\frac{1}{(x+8)^2}}\Big|_{x=0} = 0$$

$x=0$-ban véges ugrás van (elsőfajú szak.)

b)

$\boxed{8}$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(\cos 5x^2)\cdot 10x \cdot 3x^2 - \sin 5x^2 \cdot 6x}{9x^4}, & \text{ha } x>0 \\ 1\cdot e^{-\frac{1}{(x+8)^2}} + x\, e^{-\frac{1}{(x+8)^2}} \dfrac{2}{(x+8)^3}, & \text{ha } x<0 \text{ és } x\neq -8 \end{cases}$$

$f'(0)\ \nexists$, mert f nem folytonos $x=0$-ban

$f'(-8)\ \nexists$, mert f nem értelmezett $x=-8$-ban.

an1z2p10042913.

5. feladat (23 pont)

Keresse meg az alábbi határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^4 \ln x^6$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{4x}-1}{3x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{ch}(5x-4)}{\operatorname{sh}(5x-2)}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 5x^2}{\operatorname{arctg} 2x^2}$

a.) $\boxed{6}$ $\lim\limits_{x\to 0+0} \underbrace{\dfrac{\ln x^6}{\frac{1}{x^4}}}_{\frac{\infty}{\infty}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\frac{1}{x^6}\cdot 6x^5}{\frac{-4}{x^5}} = \lim\limits_{x\to 0+0} -\frac{3}{2}x^4 = 0$

b.) $\boxed{4}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{\dfrac{e^{4x}-1}{3x^2}}_{\frac{\infty}{\infty}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{\dfrac{4e^{4x}}{6x}}_{\frac{\infty}{\infty}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{16e^{4x}}{6} = \infty$

c.) $\boxed{7}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{5x-4}+e^{-(5x-4)}}{e^{5x-2}-e^{-(5x-2)}} = \lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{\dfrac{e^{5x}}{e^{5x}}}_{=1} \dfrac{e^{-4}+\overbrace{e^{-10x+4}}^{\to 0}}{e^{-2}-\underbrace{e^{-10x+2}}_{\to 0}} =$

$= \dfrac{e^{-4}}{e^{-2}} = \dfrac{1}{e^2}$

d.) $\boxed{6}$ $\lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\dfrac{\arcsin 5x^2}{\operatorname{arctg} 2x^2}}_{\frac{0}{0}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-(5x^2)^2}}\,10x}{\frac{1}{1+(2x^2)^2}\,4\cdot x} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

$\dfrac{x}{x} = 1$

au1z2p10042914.

6. feladat (14 pont)

$$f(x) = (1 + \operatorname{ch} 2x)^{1+x/3}$$

a) $f'(x) = ?$

b) Írja fel az $\tilde{x} = 0$ pontbeli érintőegyenes egyenletét!

a.) $\boxed{9}$ $f(x) = e^{\ln (1+\operatorname{ch}2x)^{1+x/3}} = e^{(1+\frac{x}{3})\cdot \ln(1+\operatorname{ch}2x)}$ (2) $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = e^{(1+\frac{x}{3})\ln(1+\operatorname{ch}2x)} \cdot \left(\left(1+\frac{x}{3}\right)\cdot \ln(1+\operatorname{ch}2x)\right)' =$ (3)

$= (1+\operatorname{ch}2x)^{1+\frac{x}{3}} \underbrace{\left(\frac{1}{3}\ln(1+\operatorname{ch}2x) + \left(1+\frac{x}{3}\right)\frac{\operatorname{sh}2x \cdot 2}{1+\operatorname{ch}2x}\right)}_{4}$ $x \in \mathbb{R}$

b.) $\boxed{5}$ $y_é = f(0) + f'(0)(x-0)$ (2)

$f(0) = 2$; $f'(0) = 2\left(\frac{1}{3}\ln 2 + 0\right)$

$y_é = 2 + \frac{2}{3}\ln 2 \cdot x$ (3)

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

7. feladat (8 pont)

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{2x^2+5x} - \sqrt{2x^2+7x-5}\right) = ?$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{2x^2+5x} - \sqrt{2x^2+7x-5}\right) \frac{\sqrt{2x^2+5x} + \sqrt{2x^2+7x-5}}{\sqrt{2x^2+5x} + \sqrt{2x^2+7x-5}} =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2+5x - (2x^2+7x-5)}{\sqrt{2x^2+5x} + \sqrt{2x^2+7x-5}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x+5}{\sqrt{2x^2+5x} + \sqrt{2x^2+7x-5}} =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} \frac{-2+\frac{5}{x}}{\sqrt{2+\frac{5}{x}} + \sqrt{2+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^2}}} = -1 \cdot \frac{-2+0}{\sqrt{2+0} + \sqrt{2+0-0}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} = -1$

an1z2p1004295.

8. feladat (12 pont)

$$f(x) = \frac{x-2}{(x+2)^3}$$

a) $f'(x) = ?$ Írja fel az $x_0 = -3$ pontbeli érintőegyenesének egyenletét!

b) Adja meg azokat a legbővebb nyílt intervallumokat, melyeken a függvény szigorúan monoton nő, illetve szigorúan monoton csökken!

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x+2)^3 - (x-2)\cdot 3(x+2)^2}{(x+2)^6} \qquad x \neq -2 \qquad 2$$

$$f'(x) = \frac{x+2 - 3(x-2)}{(x+2)^4} = \frac{-2x+8}{(x+2)^4} = 0 \Rightarrow x = 4 \qquad 1$$

$(x+2)^4 > 0$

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2, 4)$	4	$(4,\infty)$
f'	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	szak. hely	$\nearrow$		$\searrow$

5

Érintőegyenes:

$$y_é = f(-3) + f'(3)\,(x+3) = 5 + 14(x+3) \qquad 4$$

an1a2p100429/6