Villamosmérnök A3 (2015 ősz) 2. vizsga ZH

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Oldja meg az $y' = \frac{xe^{x^2}}{y^3}$, $y(0) = -2$ kezdetiérték-problémát!

2. Mi $\mathrm{CROSS}(r(1 + \mathrm{rot}(r|r|)))$ ($r \in \mathbb{R}^2$) értéke a $(2,1)$ pontban?

3. $\int_F v \, df = ?$, ahol $v(x,y) = (4x^3 + \sin^2 y^3, 4y^3 + \cos x)$, F pedig az origó középpontú, 2 sugarú kör, mint kifelé irányított, 2-dimenzióbeli valódi felület felső (az $y \geq 0$ félsíkba eső) fele.

4. Írja fel az $1/z$ komplex függvény azon 1 körüli Laurent-sorát, amely előállítja a j pontban.

5. (a) Mi az $r(u,v)$ ($(u,v) \in A$) egyenlettel megadott felület felszíne?
(b) Legyen a izolált szingularitási helye az f komplex függvénynek. Mikor mondjuk, hogy f-nek n-edrendű pólusa van a-ban ($n \in \mathbb{N}$)?
(c) Igazak-e a következő állítások?
(c1) Ha a folytonosan deriválható v vektorfüggvényre igaz, hogy $\mathrm{div}\, v = 0$ egy N normáltartományon, akkor v merőleges az N-et határoló felület felületi normálisára (az egész felületen).
(c2) Ha a folytonosan deriválható v vektorfüggvényre igaz, hogy $\mathrm{div}\, v = 0$ $\mathbb{R}^2$-en, akkor v konstans $\mathbb{R}^2$-en.

Villamosmérnök A3 (2015 ősz) — 2. vizsga ZH

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Oldja meg az $y' = \frac{xe^{x^2}}{y^3}$, $y(0) = -2$ kezdetiérték problémát!

Megoldás. Szétválasztható: $\int y^3\,dy = \int xe^{x^2}\,dx \rightsquigarrow y^4 = 2e^{x^2} + c \rightsquigarrow 16 = y^4(0) = 2 + c \rightsquigarrow c = 14 \rightsquigarrow y = \pm\sqrt[4]{2e^{x^2} + 14}$, amiből a kezdetiérték-feltétel miatt $y = -\sqrt[4]{2e^{x^2} + 14}$.

2. Mi $\mathrm{CROSS}(r(1 + \mathrm{rot}(r|r|)))$ $(r \in \mathbb{R}^2)$ értéke a $(2,1)$ pontban?

Megoldás. $\mathrm{rot}(r|r|) = |r|\,\mathrm{rot}(r) - \mathrm{CROSS}(r)\,\mathrm{grad}\,|r| = -\mathrm{CROSS}(r)\frac{r}{|r|} = 0$ (Vagy: $\mathrm{rot}(r|r|) = -\mathrm{div}(\mathrm{CROSS}(r|r|)) = -\mathrm{div}(|r|\,\mathrm{CROSS}(r)) = -(\mathrm{CROSS}(r)\,\mathrm{grad}\,|r| + |r|\,\mathrm{div}\,\mathrm{CROSS}(r)) = -\mathrm{CROSS}(r)\frac{r}{|r|} = 0$.) Ezért $\mathrm{CROSS}(r(1 + \mathrm{rot}(r|r|))) = \mathrm{CROSS}(r)$, és ennek értéke a $(2,1)$ pontban $(-1,2)$.

3. $\int_F v\,df = ?$, ahol $v(x,y) = (4x^3 + \sin^2 y^3, 4y^3 + \cos x)$, F pedig az origó középpontú, 2 sugarú kör, mint kifelé irányított, 2-dimenzióbeli valódi felület felső (az $y \geq 0$ félsíkba eső) fele.

Megoldás. Lezárva a felületet az F': $(2,0)$, $(-2,0)$ szakasszal, a Gauss-Osztrogradszkij tétellel: $\int_{F\cup F'} v\,df = \iint_V \mathrm{div}\,v\,dV = 12\iint_V x^2 + y^2\,dV = 12\int_0^2\int_0^\pi r^3\,d\varphi dr = 3\pi r^4|_0^2 = 48\pi$, ahol V az $F\cup F'$ által határolt félkörlap. $\int_{F'} v\,df = -\int_{-2}^2 (4t^3, \cos t)(0,1)\,dt = -\int_{-2}^2 \cos t\,dt = -(\sin 2 - \sin(-2)) = -2\sin 2$, ezért $\int_F v\,df = \int_{F\cup F'} v\,df - \int_{F'} v\,df = 48\pi + 2\sin 2$.

4. Írja fel az $1/z$ komplex függvény azon 1 körüli Laurent-sorát, amely előállítja a j pontban.

Megoldás. $\frac{1}{z}$ $|z-1| > 1$ körgyűrűbeli Laurent-soráról van szó, tehát $\frac{1}{z} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1}{(z-1)^n} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1}{(z-1)^{n+1}}$.

5. (a) Mi az $r(u,v)$ $((u,v) \in A)$ egyenlettel megadott felület felszíne?
(b) Legyen a izolált szingularitási helye az f komplex függvénynek. Mikor mondjuk, hogy f-nek n-edrendű pólusa van a-ban $(n \in \mathbb{N})$?
(c) Igazak-e a következő állítások?
(c1) Ha a folytonosan deriválható v vektorfüggvényre igaz, hogy $\mathrm{div}\,v = 0$ egy N normáltartományon, akkor v merőleges az N-et határoló felület felületi normálisára (az egész felületen).
(c2) Ha a folytonosan deriválható v vektorfüggvényre igaz, hogy $\mathrm{div}\,v = 0$ $\mathbb{R}^2$-en, akkor v konstans $\mathbb{R}^2$-en.

Megoldás. (a) $\iint_A |r_u \times r_v|\,dudv$.
(b) Ha f a körüli Laurent-sorában $1/(z-a)^n$ együtthatója nem 0, de minden $m > n$-re $1/(z-a)^m$ együtthatója 0.
(c1) Nem: pl. $v(x,y) = (1,0)$ egy tengelypárhuzamos téglalapon.
(c2) Nem: pl. $v(r) = \mathrm{rot}(r)$.