A 4. vizsgadolgozat megoldásai (2014.06.19.)

① $$I=\int_0^{1/9}\frac{1}{1+\sqrt{x^3}}\,dx$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{x^3}}=\frac{1}{1-(-\sqrt{x^3})}\underset{\uparrow}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\sqrt{x^3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{3}{2}n}$$ $\boxed{3\text{ pont}}$

$|\sqrt{x^3}|<1 \iff x\in[0,1)$ egyenletesen konv. $\boxed{1\text{ pont}}$

geometriai sor

$$I=\int_0^{1/9}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{3}{2}n}\right)dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{egy. konv.}}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\underbrace{\int_0^{1/9}x^{3/2\,n}\,dx}_{\left[\frac{x^{\frac{3n}{2}+1}}{\frac{3n}{2}+1}\right]_0^{1/9}=\frac{2}{3n+2}\,\frac{1}{3^{3n+2}}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{(3n+2)\,3^{3n+2}}$$

$$\frac{2}{(3n+2)\,3^{3n+2}}\searrow 0$$ $\boxed{3\text{ pont}}$

$\rightsquigarrow$ I-t Leibniz-sor alakban kaptuk

$\Rightarrow$ $S_N=\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n\frac{2}{(3n+2)\,3^{3n+2}}$ -vel való becslés esetén a hiba

$$H=|I-S_N|<\frac{2}{(3N+2)\,3^{3N+2}}<10^{-4}$$ $\rightsquigarrow$ $N=2$ elég

$$\Rightarrow\quad I\approx S_2=\sum_{n=0}^{1}(-1)^n\frac{2}{(3n+2)\,3^{3n+2}}=\frac{1}{9}-\frac{2}{5\cdot 3^5}=\frac{1}{9}-\frac{2}{1215}$$ $\boxed{3\text{ pont}}$

---

② $f(x,y)=x^3+y^3-3xy \rightsquigarrow$

$f'_x(x,y)=3x^2-3y=0 \rightsquigarrow y=x^2$

$f'_y(x,y)=3y^2-3x=0 \rightsquigarrow x=y^2$

$\Rightarrow y=y^4 \Downarrow y=0$ vagy $y=1$

a lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele

$P_1(0,0)$ vagy $P_2(1,1)$ pontokban teljesül $\boxed{2\text{ pont}}$

$f''_{xx}(x,y)=6x$

$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)=-3$

$f''_{yy}(x,y)=6y$

Hesse-mátrix: $H=\begin{pmatrix}6x & -3\\ -3 & 6y\end{pmatrix}$

$\det H=36xy-9$ $\boxed{3\text{ pont}}$

$\det H(P_1)=-9<0 \Rightarrow P_1(0,0)$-ban $\nexists$ sz.é.

$\det H(P_2)=36-9=27>0 \Rightarrow P_2(0,0)$-ban $\exists$ sz.é. és ez MIN mert $6x|_{P_1}=6>0$

② folytatás

$\boxed{1 \text{ pont}}$

$f(x,y)$ mindenütt deriválható, mert a parciális deriváltjai folytonosak $\Rightarrow$ $\operatorname{grad} f(x,y) = (3x^2-3y,\ 3y^2-3x)$

$$\operatorname{grad} f(2,1) = (9,-3)$$

$\underline{v} = (-1,3) \rightsquigarrow |\underline{v}| = \sqrt{(-1)^2+3^2} = \sqrt{10}$

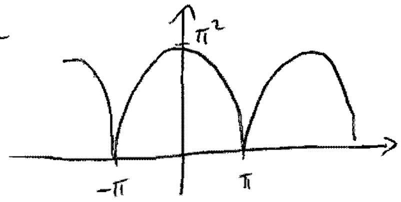
$P(2,1)$-ben a $\underline{v}$ irányban a derivált

$$f'_v(2,1) = \left\langle \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}, \operatorname{grad} f(2,1)\right\rangle =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot 9 + \frac{3}{\sqrt{10}}(-3) = \underline{\underline{-\frac{18}{\sqrt{10}}}}$$ $\boxed{4 \text{ pont}}$

---

③ $f(x) = \pi^2 - x^2$



páros $\Rightarrow$ $b_n = 0$ $\boxed{1 \text{ pont}}$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\,dx = \frac{1}{\pi}\underbrace{\left[\pi^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}}_{\frac{2\pi^3}{3}} = \underline{\underline{\frac{2\pi^2}{3}}}$$ $\boxed{2 \text{ pont}}$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\cos nx\,dx \underset{P}{=} \frac{2}{\pi}\left\{\underbrace{\left[(\pi^2-x^2)\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0} + \int_0^{\pi} 2x\cdot\frac{\sin nx}{n}\,dx\right\} =$$

parc. int

$u = \pi^2 - x^2 \quad u' = -2x$

$v' = \cos nx \quad v = \frac{\sin nx}{n}$

$$\underset{\substack{P\\ \text{parc. int}}}{=} \frac{2}{\pi}\left\{\left[-2x\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi}\frac{2\cos nx}{n^2}\,dx}_{\left[\frac{2\sin nx}{n^3}\right]_0^{\pi} = 0}\right\} = \frac{2}{\pi}\left(-2\pi\frac{\cos n\pi}{n^2}\right) = -\frac{4\cos n\pi}{n^2} =$$

$u = 2x \quad u' = 2$

$v' = \frac{\sin nx}{n} \quad v = -\frac{\cos nx}{n^2}$

$$= \underline{\underline{\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}}}$$ $\boxed{4 \text{ pont}}$

A Fourier-sor:

$$\Phi(x) = \frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx = f(x)$$ $\boxed{1 \text{ pont}}$

mindenütt, mert $f(x)$ folytonos (Dirichlet-tétel) $\boxed{2 \text{ pont}}$

(4)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a+b & 0 \\ 3 & -2 & a & b \\ -3 & -6 & a-b & 2b \end{array}\right) \underset{\substack{S_2-3S_1 \\ S_3+3S_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a+b & 0 \\ 0 & -8 & -2a-3b & b \\ 0 & 0 & 4a+2b & 2b \end{array}\right)$$

[1 pont]

$\Rightarrow$ • $\nexists$ megoldás, ha $4a+2b=0$ de $2b \neq 0$

akkor $\boxed{b=-2a \text{ és } a \neq 0}$ $\Rightarrow \nexists$ mo.

[3 pont]

• ha $4a+2b=0$ és $2b=0$, akkor $a=b=0$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

[3 pont]

$\hookrightarrow -8y=0 \Rightarrow y=0$

$x+2y=0 \Rightarrow x=0$

z tetszőleges

akkor $\boxed{a=b=0}$ $\Rightarrow$ ∞ sok megoldás 1 szabad paraméterrel:

$x=y=0,\ z=t \in \mathbb{R}$

• ha $\boxed{b \neq -2a}$ $\Rightarrow$ pontosan 1 megoldás:

$$z = \frac{b}{2a+b}$$

[3 pont]

$$-8y = b + (2a+3b)\cdot\frac{b}{2a+b} \rightsquigarrow y = -\frac{(a+b)b}{2(2a+b)}$$

$$x = \frac{(a+b)b}{2a+b} - \frac{(a+b)b}{2a+b} = 0$$

(5) Az $\underline{n}$ egységnyi normálvektorú origón átmenő síkra való vetítés mátrixa $P = I - \underline{n} \circ \underline{n} = I - \underline{n} \cdot \underline{n}^T$

A $2x+3y-z=0$ sík egy normálvektora $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

ennek hossza: $\sqrt{2^2+3^2+1^2} = \sqrt{14}$

így $\underline{n} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \\ -\frac{1}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{n} \circ \underline{n} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \\ -\frac{1}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{14} & \frac{6}{14} & -\frac{2}{14} \\ \frac{6}{14} & \frac{9}{14} & -\frac{3}{14} \\ -\frac{2}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{1}{14} \end{pmatrix}$

így a vetítés mátrixa:

$$P = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 10 & -6 & 2 \\ -6 & +5 & 3 \\ 2 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{4 pont}}$

- Egy vetítésnek 2 sajátértéke lehet: 0 vagy 1 $\boxed{\text{2 pont}}$

  A 0 sajátértékhez tartozó sajátvektor a sík normálvektora, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

  az 1 sajátértékhez tartozó sajátvektor a sík $\forall$ vektora

- A determináns a sajátértékek szorzata $\Rightarrow \det P = 0$ $\boxed{\text{2 pont}}$

- Egy mátrix rangja a képterének dimenziója. Itt a képtér a sík $\Rightarrow \operatorname{rang} P = 2$

$\boxed{\text{2 pont}}$