

**Bevezetés a számításméletbe II.**  
**Zárthelyi feladatok** — pontozási útmutató  
2018. április 23.

**Általános alapelvek.**

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontoszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontoszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek pusztán leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontoszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozathoz nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontoszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

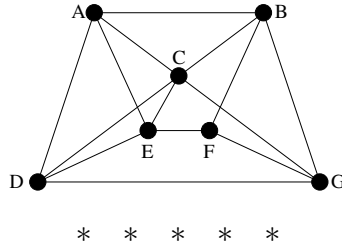
1. A  $G$  egyszerű gráf csúcshalmaza legyen  $V(G) = \{1, 2, \dots, 10\}$ . Az  $x, y \in V(G)$ ,  $x \neq y$  csúcsok pontosan akkor legyenek szomszédosak  $G$ -ben, ha  $|x - y| \leq 2$ . Van-e  $G$ -nek olyan feszítőfája, amely
- tartalmazza  $G$ -nek az összes olyan  $\{x, y\}$  élet, amelyre  $x, y \leq 3$  teljesül;
  - tartalmazza  $G$ -nek az összes olyan  $\{x, y\}$  élet, amelyre  $|x - y| = 2$  teljesül?

\* \* \* \* \*

- a) Az  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$  és  $\{2, 3\}$  élek (három hosszú) kört alkotnak  $G$ -ben. (1 pont)  
Mivel egy fa (a fa definíciója szerint) nem tartalmazhat kört, ezért ilyen feszítőfa nincs. (2 pont)
- b) A feladatban megadott élek (a  $V(G)$  csúcshalmazon) két komponensű, de körmentes gráfot alkotnak: ez az  $1 - 3 - 5 - 7 - 9$  és a  $2 - 4 - 6 - 8 - 10$  utakból áll. (1 pont)  
Vegyünk hozzá ehhez az élhalmazhoz egy tetszőleges olyan élet, amelynek az egyik végpontja páros, a másik páratlan (például:  $\{1, 2\}$ ). (1 pont)  
Ezzel nyilván nem hoztuk létre kört (hiszen a behúzott él két végpontja között nem volt út), (2 pont)  
de a kapott gráf már összefüggő (hiszen most már a  $V(G)$  bármely két csúcsa között van út). (2 pont)  
Mivel  $V(G)$  a kapott élhalmazzal körmentes és összefüggő gráfot alkot, ezért feszítőfa. Így a válasz itt igen. (1 pont)

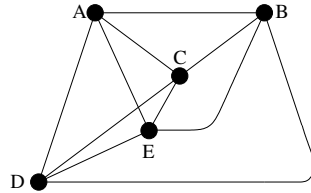
Ha egy megoldó behúzott egy helyesen választott élet, a kapott gráfot lerajzolja, majd minden további indoklás nélkül kijelenti, hogy ez feszítőfa, az a b) feladatért járó pontok közül legföljebb 3-at kapjon. Ha viszont egy megoldó a rajz alapján nem csak kijelenti, hogy feszítőfát kapott, hanem indoklásként leírja, hogy a gráf körmentes, összefüggő és minden csúcsot tartalmaz, akkor a b) feladatból járó 7 pontból akár 6-ot is megkaphat; ha a feszítőfa tulajdonságait csak részben sorolja fel, akkor az hiányzó tulajdonságoként a 6-ból egy-egy pont elvesztését jelentsen.

2. Síkbarajzolható-e az alábbi gráf? Ha igen, rajzoljuk le a síkba úgy, hogy az élei egyenes szakaszok legyenek; ha nem, akkor bizonyítsuk ezt be.



Hagyjuk el a gráfból a  $\{C, G\}$  és  $\{F, G\}$  éleket. (2 pont)

A keletkező gráfban  $F$  és  $G$  foka 2 lesz, ezeket „olvasszuk össze” egyetlen éllé: (2 pont)



A kapott gráf a  $K_5$  (az 5 csúcú teljes gráf), mert bármely két csúcsa szomszédos. (2 pont)

Mivel a feladatbeli gráf tartalmaz  $K_5$ -tel topologikusan izomorf részgráfot, ezért a Kuratowski-tétel (annak a „könnyű iránya”) szerint nem síkbarajzolható. (4 pont)

Megjegyezzük, hogy a gráf  $K_{3,3}$ -mal topologikusan izomorf részgráfot is tartalmaz (például az  $\{A, E\}$ ,  $\{B, C\}$ ,  $\{C, D\}$  és  $\{F, G\}$  élek elhagyásával, majd az így másodfokúvá vált  $F$  éleinek összeolvasztásával kaphatunk ilyet), így a feladatnak más jó megoldása is van. A  $K_5$ -tel vagy  $K_{3,3}$ -mal topologikusan izomorf részgráf létezését nem feltétlen szükséges a fenti részletességgel indokolni: elegendő, ha egy megoldó a rajzán jelzi (például áthúzással) az elhagyandó éleket és összeolvasztandó csúcsokat. Azonban egy teljes pontszámot érő megoldásban ezeknek a lépéseknek valamilyen formában mindenképp jelezve kell lenni. Ha például egy megoldó csak három „H” és három „K” betűt helyez a rajzára, de nem mutatja, hogyan keletkezik ezekből a  $K_{3,3}$ -mal topologikusan izomorf részgráf, az a pontozásban jelzett első 6 pontból legföljebb 2-t kaphat.

3. A  $G$  egyszerű gráf csúcshalmaza legyen  $V(G) = \{1, 2, \dots, 10\}$ . Az  $x, y \in V(G)$  csúcsok pontosan akkor legyenek szomszédosak  $G$ -ben, ha  $|x - y| = 3$  vagy  $|x - y| = 5$ . Határozzuk meg a  $G$  gráf

- $\chi(G)$  kromatikus számát;
- $\chi_e(G)$  élkromatikus számát.

\* \* \* \* \*

a) Mivel a szomszédos csúcspárok különbsége mindig páratlan (3 vagy 5), ezért minden él egyik végpontja páros, a másik páratlan. (2 pont)

Ebből következően  $G$  csúcsai megszínezhetők 2 színnel: a páros számok kapják az egyik, a páratlanok a másik színt. (2 pont)

Mivel  $G$ -nek van éle, ezért egy színnel biztosan nem színezhetők a csúcsai. Így  $\chi(G) = 2$ . (1 pont)

b) Könnyű meggyőződni róla (például  $G$  lerajzolásával), hogy  $G$ -ben a 4, 5, 6 és 7 csúcsok foka 3, a többi 2. Így a maximális fokszám:  $\Delta(G) = 3$ . (2 pont)

Az a) feladatban beláttuk, hogy  $\chi(G) = 2$ , így  $G$  páros gráf. (1 pont)

Ezért König tanult tétele szerint  $\chi_e(G) = \Delta(G) = 3$ . (2 pont)

A König-tételre való hivatkozás helyett természetesen teljes értékű megoldást jelent az is, ha valaki megadja  $G$  éleinek egy 3 színnel való színezését. Ekkor a színezés megadása önmagában 2 pontot ér, majd ebből és a  $\chi_e(G) \geq \Delta(G)$  összefüggésből a  $\chi_e(G) = 3$  következtetés levonása további 1-et.

4. Hagyjuk el a 3. feladatban definiált  $G$  gráfból a  $\{3, 8\}$  élt, a kapott gráfot jelöljük  $H$ -val. ( $H$  csúcshalmaza tehát azonos  $G$ -ével, az éleinek a száma viszont eggyel kisebb.)

a) Határozzuk meg  $\nu(H)$ -t, a  $H$ -beli független élek maximális számának értékét és adjunk meg  $H$ -ban egy maximális független élhalmazt.

b) Határozzuk meg  $\alpha(H)$ -t, a  $H$ -beli független pontok maximális számának értékét és adjunk meg  $H$ -ban egy maximális független ponthalmazt.

\* \* \* \* \*

a)  $H$ -ban független élhalmazt alkotnak például a  $\{2, 7\}$ ,  $\{3, 6\}$ ,  $\{4, 9\}$  és  $\{5, 8\}$  élek. (1 pont)  
 A  $\{4, 5, 6, 7\}$  csúcsok pedig lefógó ponthalmazt alkotnak  $H$ -ban. Erről meggyőződhetünk  $H$  lerajzolásával is vagy hivatkozhatunk arra, hogy mivel az  $\{1, 2, 3, 8, 9, 10\}$  halmazban nyilván nincs 3 távolságra lévő pár és az egyetlen 5 távolságra lévő a  $H$  élei közül hiányzó  $\{3, 8\}$ , ezért  $H$  minden éle tartalmaz 4 és 7 közötti csúcst. (2 pont)

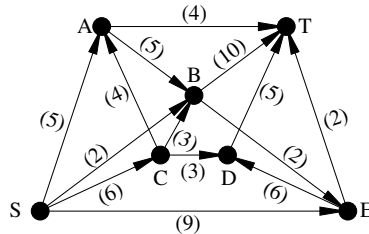
A megadott négy elemű független élhalmaz miatt  $\nu(H) \geq 4$ . Hasonlóan, a megadott négy elemű lefógó ponthalmaz miatt  $\tau(H) \leq 4$ . Ezeket összevetve a tanult  $\nu(H) \leq \tau(H)$  összefüggéssel a  $4 \leq \nu(H) \leq \tau(H) \leq 4$  becsléseket kapjuk. Így  $\nu(H) = 4$  és (például) a fent felsorolt élek maximális független élhalmazt alkotnak. (2 pont)

A fentiekből az is kiderült, hogy  $\tau(H) = 4$ . Így Gallai tétele miatt  $\alpha(H) = 10 - \tau(H) = 6$ . (2 pont)  
 $H$ -ban független ponthalmazt alkotnak az  $\{1, 2, 3, 8, 9, 10\}$  csúcsok (amit fentebb, a  $\{4, 5, 6, 7\}$  lefógóságának indoklása közben már megmutattunk). (2 pont)

$\alpha(H) = 6$  miatt tehát ez egy maximális független ponthalmaz. (1 pont)

A fenti mellett számos más, helyes megoldás is elképzelhető. Hivatkozhatunk például a **3.** feladat megoldása alapján arra is, hogy  $H$  páros gráf, amelynek a két pontosztálya a páros, illetve a páratlan számok (hiszen a  $\{3, 8\}$  él elhagyása ezen nem változtat); mivel azonban például az  $X = \{2, 8, 10\}$  halmazra  $N(X) = \{5, 7\}$ , ezért a Hall-tétel szerint  $H$ -ban nincs a páros számokat lefedő párosítás, így a megadott 4 élű párosítás valóban maximális. De mondhatjuk egyszerűen azt is, hogy mivel 3 és 8 elsőfokúak, ezért egy öt élű, vagyis teljes párosításban a párjaik csak 6, illetve 5 lehetnének; ezek után a kettő fokú 2 és 9 párjai már csak 7, illetve 4 lehetnének; viszont az így kimaradó 1 és 10 nem szomszédosak, így öt élű párosítás mégsem lehet.  $\alpha(H)$  értékének meghatározására történhet úgy is, hogy megadunk egy hat élű lefógó élhalmazt is, majd hivatkozunk a tanult  $6 \leq \alpha(H) \leq \varrho(H) \leq 6$  összefüggésekre. Vagy hivatkozhatunk arra is, hogy a Gallai tételek bizonyításakor tanultak szerint egy minimális lefógó ponthalmaz komplementere maximális független csúcshalmaz kell legyen.

5. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot ( $S$ -ből  $T$ -be).



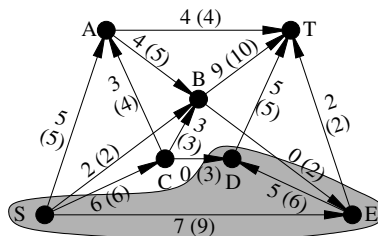
\* \* \* \* \*

Az alábbi ábrán látható folyam értéke 20. (3 pont)

Az ugyancsak az ábrán látható vágás (tehát az  $\{S, D, E\}$  halmaz és a maradék csúcsok között futó élek halmaza) értéke (tehát az  $\{S, D, E\}$  halmazból a maradék csúcsok halmazába menő élek összkapacitása) szintén 20. (4 pont)

Mivel tetszőleges folyam értéke legföljebb akkora lehet, mint tetszőleges vágás értéke, ezért a 20 értékű vágás bizonyítja, hogy a 20 értékű folyam maximális. (3 pont)

A folyam maximalitása mellett lehet annak megmutatásával is érvelni, hogy a 20 értékű folyamhoz tartozó (helyesen felrajzolt) segédgráfban már nincs javító út. Az utolsó 3 pont annak jár, aki (érdemben) indokolja, hogy a megadott folyam maximális. (De sem „a Ford-Fulkerson tétel miatt a folyam maximális” mondat – további kiegészítés híján – *nem* tekintendő (érdemi) indoklásnak, sem az algoritmus pusztá futtatása.)



6\*. Felsorolhatók-e az  $\{1, 2, \dots, 10\}$  halmaz összes négy elemű részalmazai egyetlen sorozatban úgy, hogy a sorozatban egymás mellett álló részalmazoknak mindig legyen legalább két közös eleme (és a sorozat minden részalmazt pontosan egyszer tartalmazzon)?

\* \* \* \* \*

A rövideg kedvéért használjuk a  $H = \{1, 2, \dots, 10\}$  jelölést.

A  $G$  gráf csúcsalmazza álljon a  $H$  összes négy elemű részalmazából. Két különböző csúcs akkor legyen szomszédos  $G$ -ben, ha a megfelelő részalmazoknak van legalább két közös eleme. A feladat azt kérdezi, hogy létezik-e  $G$ -ben Hamilton-út. (1 pont)

$G$  csúcsainak száma a  $H$  négy elemű részalmazainak száma, vagyis  $\binom{10}{4} =$  (1 pont)  
 $= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210.$  (1 pont)

Válasszuk ki a  $G$  egy tetszőleges  $U$  csúcsát (vagyis a  $H$  egy négy elemű részalmazát).

$G$ -nek  $\binom{6}{4}$  olyan csúcsa van, amely  $U$ -tól diszjunkt, hiszen a hat elemű  $(H \setminus U)$ -ből kell négy elemű részalmazt választani. (1 pont)

Továbbá  $G$ -nek  $4 \cdot \binom{6}{3}$  olyan csúcsa van, amelynek  $U$ -val pontosan egy közös eleme van. Valóban, ez az egyetlen közös elem négyféleképpen választható ki  $U$ -ból, de bármelyiket is választottuk, a  $H \setminus U$  hat eleme közül  $\binom{6}{3}$ -féleképpen választható mellé további három. (1 pont)

Mivel  $\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$  és  $4 \cdot \binom{6}{3} = 4 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 80,$  (1 pont)

ezért  $G$ -nek  $209 - 80 - 15 = 114$  olyan ( $U$ -tól különböző) csúcsa van, amelynek  $U$ -val legalább két közös eleme van. (1 pont)

Mindebből tehát az következik, hogy  $G$ -ben minden csúcs foka 114. (1 pont)

Mivel  $114 \geq \frac{2 \cdot 10}{2} = 105$  (és  $G$  egyszerű gráf), ezért Dirac tétele szerint  $G$ -ben van Hamilton-kör, így Hamilton-út is. A feladat szövegének megfelelő sorozat tehát létezik. (2 pont)

A feladat megoldható közvetlenül, bármilyen előismeret nélkül is egy, a feladat feltételeinek megfelelő konkrét sorozat megkonstruálásával. Ha tehát egy megoldó világosan leír egy ilyen sorozatot és meggyőzően érvel amellett, hogy az helyes, az nyilván maximális pontot ér. Lehet részpontoszámot adni nem teljesen tökéletes konstrukciókért is, de csak akkor, ha az teljesen világosan le van írva és némi (nem túl sok) további munkával hibátlanná tehető lett volna. Azonban nem adható pontszám olyan vázlatos, nem végigvitt konstrukcióért, amelynek a leírásából nem derül ki egyértelműen, hogy hogyan sorolta volna fel az összes négy elemű részalmazt; vagy ha egyáltalán nem világos, hogy az a felsorolás miért lett volna jó vagy azzá tehető.