Czémelly Szabolcs

- Aláírás: • 2 házit megírni

• 3 kis zh-t jól megírni

• www.evt.bme.hu

• Bilicz - Példatár

- Kirchhoff-típusú hálózatok, majd rendszer.

• Folytonos idejű, lineáris invariáns rendszerek periodikus állandósult állapota

↳ gerjesztés egy periodikus időfgv.

1. PERIODIKUS JEL

DEF: periodikus $\Longleftrightarrow x(t+T)=x(t)\ ,\ \forall t$

itt T a periódus (periódusidő)

JELLEMZŐI:

a) $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$ alapkörfrekvencia

vagy alapfrekvencia f_0 vagy $\frac{1}{T}$

b) Egyszerű középérték

$$X_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$$

c) Váltakozó összetevő

$$\tilde{x}(t) = x(t) - X_0 \Rightarrow \tilde{X}_0 = 0$$

d) Abszolút középérték

$|x(t)|$ a kétoldalasan egyenirányított jel

$$X_a = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|\,dt$$

egy periódus alatt átáramló nettó töltés

(X_0: ha $x(t) = i(t)$ áram, $Q_T = I_0 \cdot T$)

e) Effektív érték (RMS - Root Mean Square)

$$X_{eff} = X_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt}$$

ha R, $i(t)$ áram $P_R = R \cdot I_{eff}^2$

f) Alakjellemzők (a szinuszostól való eltérést méri)

- formatényező: $k_f = \frac{X_{eff}}{X_a}$ — jel abs. közepe
- csúcstényező: $k_m = \frac{X_m}{X_{eff}}$ ahol $X_m = \max|x(t)|$

- torzítási tényező: (klirr-faktor)

Példa:

$$x(t) = \hat{x} \cdot \cos(\omega t)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \omega \rightarrow f_0 = \frac{1}{T}$$

jellemzők: $x_0 = 0$

$$x_a = \frac{1}{T} \cdot 4 \int_0^{\frac{T}{4}} \hat{x} \cos(\omega t)\, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \hat{x}$$

$$x_{eff} = \left(\frac{1}{T} \int_0^T \hat{x}^2 \cdot \cos^2(\omega t)\, dt \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{\hat{x}^2}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2}\, dt \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\hat{x}}{\sqrt{2}}$$

$$k_f = \frac{x_{eff}}{x_a} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \simeq 1{,}111\ldots$$

$$k_m = \frac{x_m}{x_{eff}} = \frac{\hat{x}}{x_{eff}} = \sqrt{2}$$

3.) Műszerek indikációja tfh: áram, I

- $I = I_{eff}$: lágyvasas, elektrodinamikus, hőszálas, elektrosztatikus műszer esetén
- $I = I_0$: állandómágneses (Deprez) „DC" állás
  középérték
- $I = I_a \cdot 1{,}11$ —— " —— „AC" állás

  oka: kétoldalas egyenirányítás, szinuszra kalibrálva

  $$I_{eff} = I_a \cdot \frac{I_{eff}}{I_a} = I_a \cdot 1{,}111 \quad (\text{szinusz})$$

- $I = \tilde{I}_{eff}$: indukciós műszer

  $$I_{eff} = \sqrt{\tilde{I}_{eff}^2 + I_0^2}$$

2.) A FOURIER-SOR

Euler, D'Alembert, Fourier, Dirichlet

rezgő húr, hővezetés, ...

1.) Alakjai:

a) „Matematikai" valós: $x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\underbrace{X_k^A}_{} \cdot \cos(k\omega_0 t) + \underbrace{\sin(k\omega_0 t)}_{X_k^B} \right]$

egyenlő-e a jobb mindig a Fourier soros megközelítéssel?

$$x_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$$

$$X_k^A = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(k\omega_0 t)\,dt$$

$$X_k^B = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(k\omega_0 t)\,dt$$

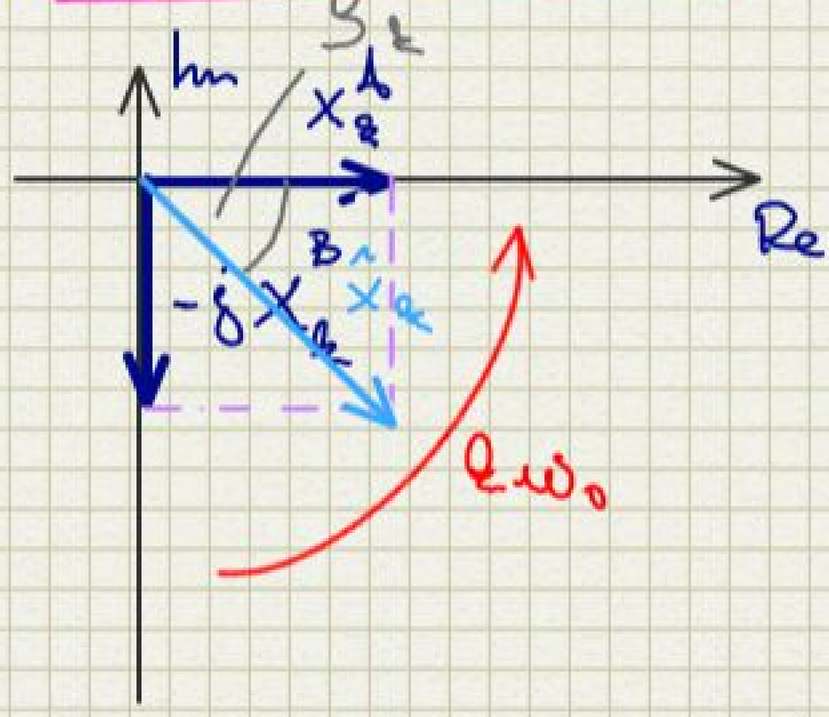
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

x_0 – állandó összetevő

$k=1$ – alapharmonikus összetevő

$k>1$ – felharmonikusok

b) „Mérnöki" valós alak:



$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}_k \cdot \cos(k\omega_0 t + \rho_k)$$

$$\hat{X}_k = \sqrt{(X_k^A)^2 + (X_k^B)^2};$$

$$\rho_k = -\operatorname{arctg}\frac{X_k^B}{X_k^A}$$

$$X_k^A = \hat{X}_k \cos\rho_k$$

$$X_k^B = -\hat{X}_k \cdot \sin\rho_k$$

c) Komplex alak

$$\bar{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^C e^{j\omega_0 t}, \quad X_k^C = \frac{1}{T}\int_0^T \bar{x}(t)\cdot e^{-j\omega_0 k t}\,dt$$

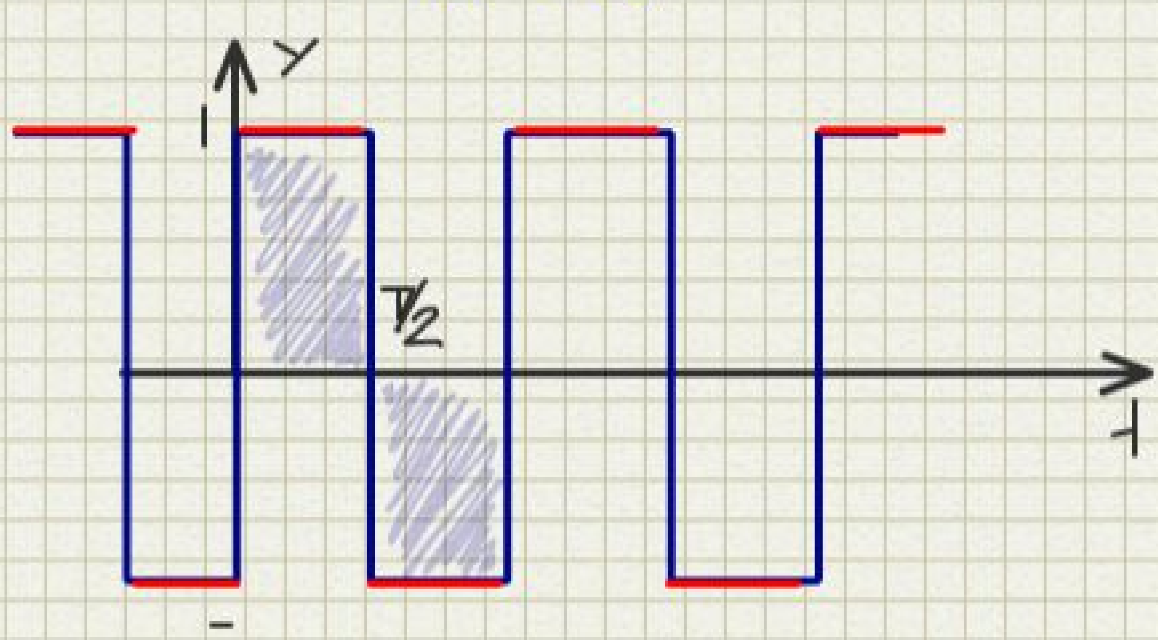
speciális eset:

konjugált

$$x(t) \text{ valós} \Leftrightarrow X^c_{-k} = \left(X^c_k\right)^*$$

$$\Rightarrow X_0 = X_0^C \; ; \; \hat{X}_k = 2\left|X^c_k\right| \; ; \; \rho_k = \text{arc } X^c_k$$

d) Példa: négyszöggel



$$X_0 = 0$$

$$X^c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} 1 \cdot e^{-jk\omega_0 t}\, dt + \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} (-1)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \ldots = \frac{1-\overbrace{\cos(\pi k)}^{\to (-1)^k}}{jk\pi} =$$

$$= \begin{cases} 0; & k = \pm 2, \pm 4, \pm 6 \\ \dfrac{2}{jk\pi}, & k = \pm 1, \pm 3, \ldots \end{cases}$$

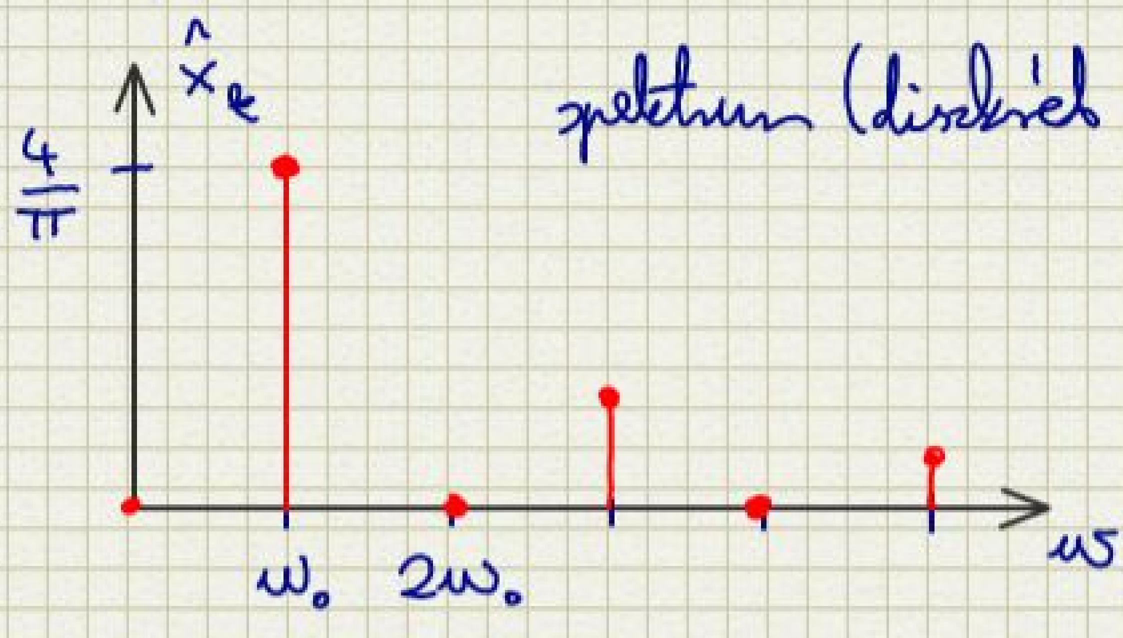
$$\hat{X}_k = 2\left|X^c_k\right| = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{4}{k\pi}, & k = \pm 1, \pm 3 \ldots ; \end{cases}$$

$$\rho_k = \begin{cases} 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & k = \pm 1, \pm 3, \ldots \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{4}{\pi}\left[\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t) + \dots\right] =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2p+1)\omega_0 t\right]}{2p+1}$$

spektrum (diszkrét v. vonalas)



③ KONVERGENCIA

1.) N-ed rendű közelítés, Fourier-polinom

$$x(t) \simeq x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} x_k^c e^{jk\omega_0 t} =$$

$$= x_0 + \sum_{k=1}^{N} \hat{x}_k \cdot \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

DEF! négyzetes középhiba: $H_N = \left[\frac{1}{T}\int_0^T |x(t) - x_N(t)|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}$

DEF: abszolút hiba: $h_N = \max |x(t) - x_N(t)|$

OCTAVE: szoftver!

2.) A konvergencia jellege és sebessége:

- $\lim\limits_{N \to \infty} H_N = 0, \forall x(t)$

- $\lim\limits_{N \to \infty} h_N = 0$, csak ha $x(t)$ folytonos!

- Ha $x(t)$ m-szer folytonosan diff-ható, akkor

$\hat{x}_k = O\left(\frac{1}{k^{m+2}}\right)$

másképp: $\lim\limits_{k \to \infty} k^{m+1} \cdot \hat{x}_k = 0$

speciális eset: $m = 0$ (pl. háromszögjel)

$\rightarrow \hat{x}_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$

$m = -1$ (pl. négyszögjel)

$\rightarrow \hat{x}_k = O\left(\frac{1}{k}\right)$

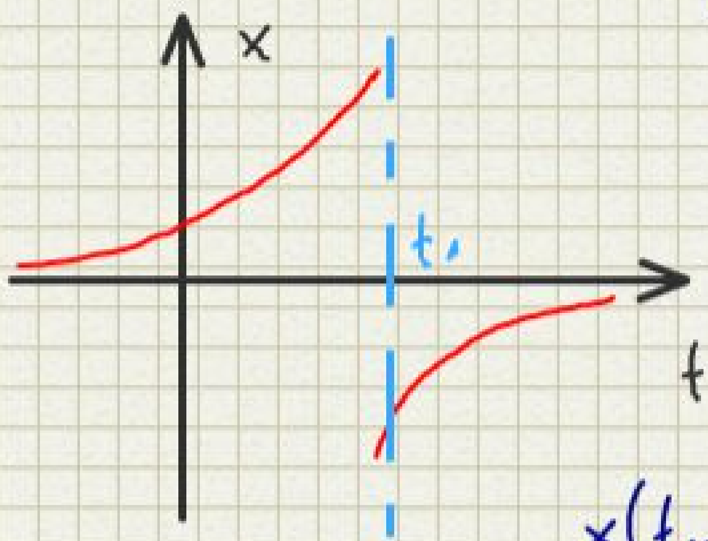
$m = -2$ (δ-komponenset)

$\rightarrow \hat{x}_k = O(1)$ (nem csökken)

3.) Gibbs - effektus

⊙ Elsőfajú (véges) szakadású fgv-ek sorbafejtése

tfh: $x(t)$-nek véges szakadása van t_1-ben



$$x(t_1-0) \neq x(t_1+0)$$

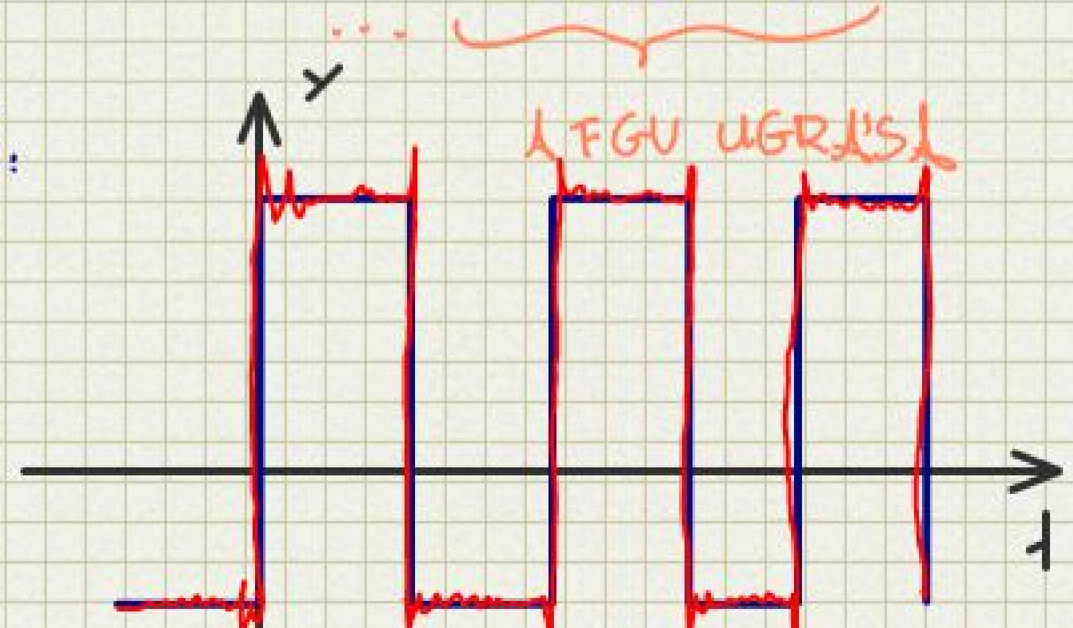
$$x(t_1-0),\ x(t_1+0) < \infty$$

⊙ Hogy viselkedik a Fourier-sor? $x_N(t_1)$

a) $\lim\limits_{N\to\infty} x_N(t_1) = \dfrac{x(t_1-0)+x(t_1+0)}{2}$

b) $\lim\limits_{N\to\infty} \left| x(t_1\pm 0) - x_N(t_1\pm 0)\right| \cong 0{,}09\, \underbrace{\left| x(t_1+0) - x(t_1-0)\right|}_{\text{EGY UGRÁS}}$

pl:



4. PARSEVAL-TÉTELE

1.)

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}_k \cos(k\omega_0 t + \alpha_k)$$

$$y(t) = Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{Y}_k \cos(k\omega_0 t + \beta_k)$$

$$x(t)\cdot y(t) = X_0 Y_0 + X_0 \sum_{k=1}^{\infty} \hat{Y}_k \cos(k\omega_0 t + \beta_k) + Y_0 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}_k \cdot$$

$$\cdot \cos(k\omega_0 t + \alpha_k) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \hat{X}_k \hat{Y}_l \cos(k\omega_0 t + \alpha_k)\cdot \cos$$

$$\cos(\omega_0 t + \beta_k)$$

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, y(t)\, dt = X_0 Y_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}_k \hat{Y}_k \cos(\alpha_k - \beta_k)}$$

2.) Néhány alkalmazása

a) Effektív érték: itt: $y(t) = x(t)$

$$\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\, dt \equiv X_{eff}^2 = X_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}_k = X_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\hat{X}_k}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad X_{eff} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\left(X^{(k)}_{eff}\right)^2}$$ geometriai összeg

harmonikus összetevők

$$x^{(0)}t \equiv X_0 \rightarrow X^{(0)}_{eff} = X_0$$

$$x^{(1)}t \equiv \hat{X}_1 \cos(\omega_0 t + \varsigma_1) \rightarrow X^{(1)}_{eff} = \frac{\hat{X}_1}{\sqrt{2}}$$

$$x^{(2)}t \equiv \hat{X}_2 \cos(2\omega_0 t + \varsigma_2) \quad \vdots$$

alkalmazás Fourier-polinomra:

$$X_{eff} \cong X_{N,eff} = \sqrt{\sum_{k=0}^{N} \left(X^{(k)}_{eff}\right)^2}$$

b.) Sorfejtés hibájának becslése

$$\varepsilon_N = \frac{X_{eff} - X_{N,eff}}{X_{eff}} \, [\%]$$

pl: négyszögjelre

$$\varepsilon_3 \cong 10\%$$

c.) Torzítási tényező

THD: total harmonic distortion

klirr-faktor /klirren-csengő, csörög

$$k = \frac{\sqrt{\left(X^{(2)}_{eff}\right)^2 + \left(X^{(3)}_{eff}\right)^2 + \dots}}{X^{(1)}_{eff}} = \frac{\sqrt{X^2_{eff} - \left(X^{(1)}_{eff}\right)^2 - X_0^2}}{X^{(1)}_{eff}}$$

falstad.org

(5.) SORFEJTÉS NUMERIKUS MÓDSZERREL

1.) FFT (fast fourier transform)

legyen $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{C}^L$, L dimenziós komplex vektor

$$\underline{b} = \mathrm{FFT}(\underline{a}), \quad b_{k+1} = \sum_{i=0}^{L-1} a_{i+1} \cdot e^{-jki\frac{2\pi}{L}},$$

$$k = 0, \ldots, L-1$$

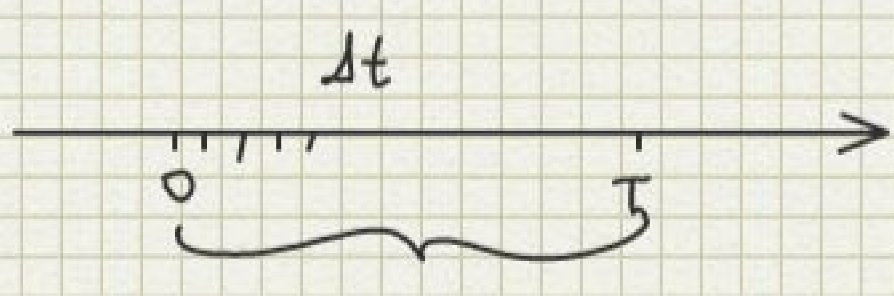
hatékony algoritmus, ha $L = 2^m$

Matlab/Octave: $y = \mathrm{fft}(x)$

2.) Fourier-sor

$T = L \cdot \Delta t$

$\Delta t = \frac{T}{L}$



$$x_k^c = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \cong \frac{1}{L \cdot \cancel{\Delta t}} \cdot \sum_{i=0}^{L-1} x(i\Delta t)\, e^{-jk\frac{2\pi}{\cancel{T}} \cdot i\frac{\cancel{T}}{L}} \cdot \cancel{\Delta t}$$

$$= \overbrace{\frac{1}{L}\sum_{i=0}^{L-1} x(i\Delta t)\, e^{-jki\frac{2\pi}{L}}}^{\mathrm{FFT}}$$

Ha $a_{i+1} = x(i\Delta t)$, és $\underline{b} = FFT(\underline{a})/L$, akkor

$X_k^c = b_{k+1}$, $k = 0, \dots, L-1$ valójában kb. $\frac{L}{2}$, mert

$b_{L-k} = b_k^*$

VI. LIN, INV. RENDSZER G-V KAPCSOLATA PERIODIKUS ÁLLANDÓSULT ÁLLAPOTBAN

1.) Válaszjel számítása

$$u(t) \cong U_0 + \sum_{k=1}^{N} \hat{U}_k \cos(k\omega_0 t + \rho_{u,k})$$

$u(t+T) = u(t)$, $\forall t$

$\Downarrow$ lin.

$y(t+T) = y(t)$, $\forall t$

$$y(t) \cong Y_k \cdot \cos(k\omega_0 t + \rho_{y,k})$$

legyen
$$\overline{U}_k = \begin{cases} U_0, & k = 0 \\ \hat{U}_k \cdot e^{j\rho_{u,k}}, & k \geq 1 \end{cases}$$

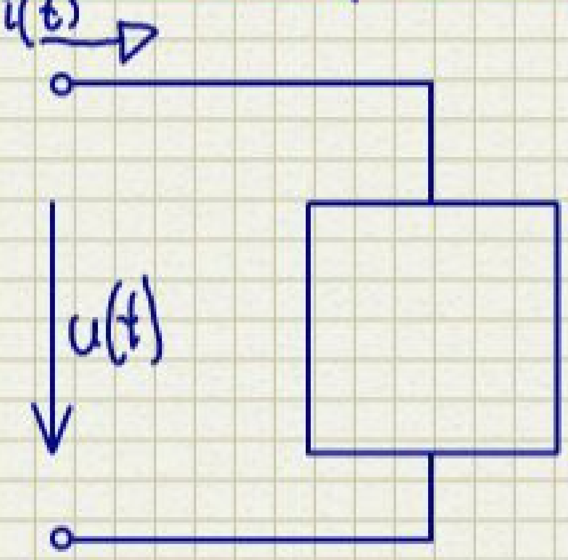
$$\overline{Y}_k = \begin{cases} Y_0, & k = 0 \\ \hat{Y}_k \cdot e^{j\rho_{y,k}}, & k \geq 1 \end{cases}$$

Szuperpozíció - elv:

$$\bar{Y}_k = \bar{H}_k \cdot \bar{U}_k$$

$$\bar{H}_k = H(j\omega)\Big|_{\omega = k\omega_0} \equiv H(jk\omega_0)$$

2.) Lineáris kétpólus teljesítményei



$$u(t+T) = u(t),\ \forall t$$

$$\Updownarrow$$

$$i(t+T) = i(t),\ \forall t$$

a) Pillanatnyi telj:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

b) Hatásos telj:

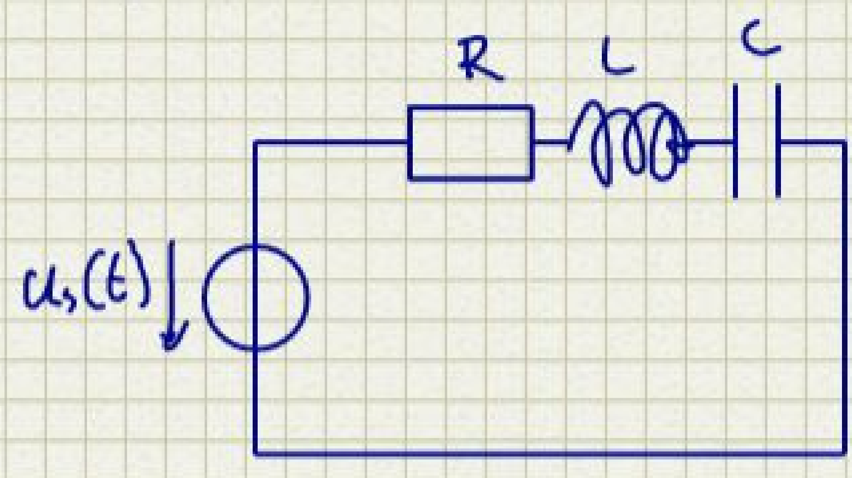
$$P \triangleq \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,i(t)\,dt$$

Parseval t. alapján:

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \hat{U}_k \hat{I}_k \cos\overbrace{(\rho_{u,k} - \rho_{i,k})}^{\varphi_k}$$

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} P_k \quad !$$

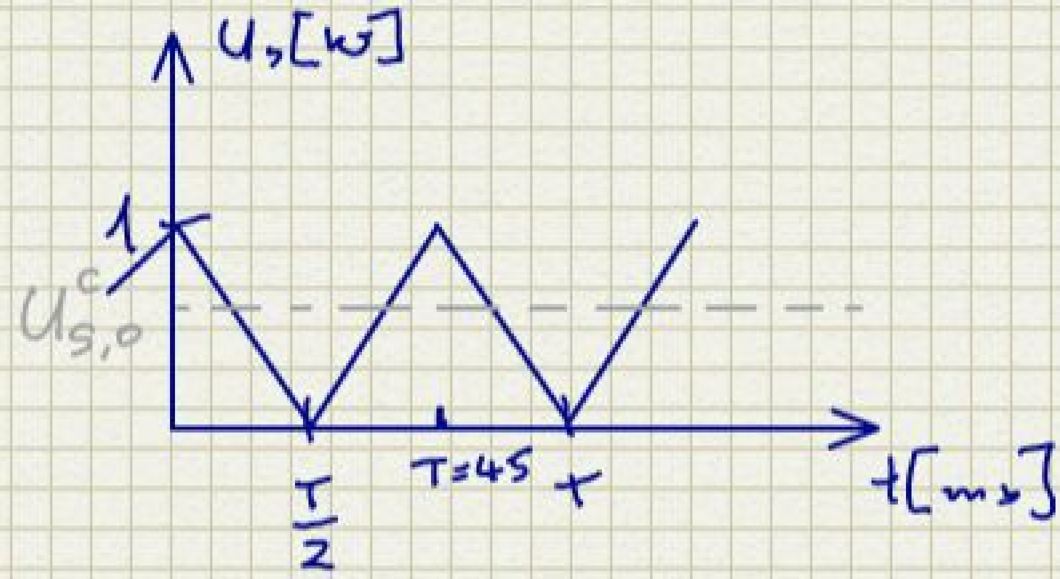
3.) Példa



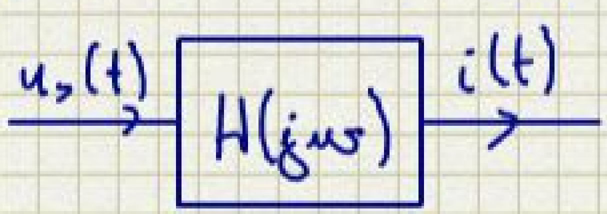
$R = 10\,\Omega$

$L = 0{,}5\,H$

$C = 4\,\mu F$



a)



$[k\Omega, mA, V, \mu F, H, ms, krad/s, mW]$

$$H(j\omega) = \frac{\overline{I}}{\overline{U}_s} = \frac{1}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{0{,}01 + 0{,}5 j\omega + \frac{1}{j\omega 4}} =$$

$$= \frac{2j\omega}{(j\omega^2) + 0{,}02 j\omega + 0{,}5}$$

b) $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \cong 0{,}14$ krad/s

$U_{s,0}^c = 0{,}5$

$$U_{s,k}^c = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u_s(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0}\left(-\frac{2}{T}t+1\right)e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \ldots$$

$$\ldots = \begin{cases} 0, & k = \pm 2, \pm 4, \ldots \\ \frac{2}{k^2\pi}, & k = \pm 1, \pm 3, \ldots \end{cases}$$

$$u_s(t) = 0{,}5 + \frac{4}{\pi^2}\Big[\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{9}\cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{25}\cos(5\omega_0 t) +$$

$$+ \frac{1}{49}\cos(7\omega_0 t) + \ldots\Big] \text{ V}$$

Hány tagot vegyünk figyelembe?

$U_{s,\mathrm{eff}} = 0{,}57735$ V

$U_{s,3,\mathrm{eff}} = 0{,}57718$ V $\quad \varepsilon = 0{,}03\ \%$

$U_{s,5,\mathrm{eff}} = 0{,}57733$ V $\quad \varepsilon = 0{,}005\%$

$u_s(t) \cong$

$\cong u_{s,5}(t)$

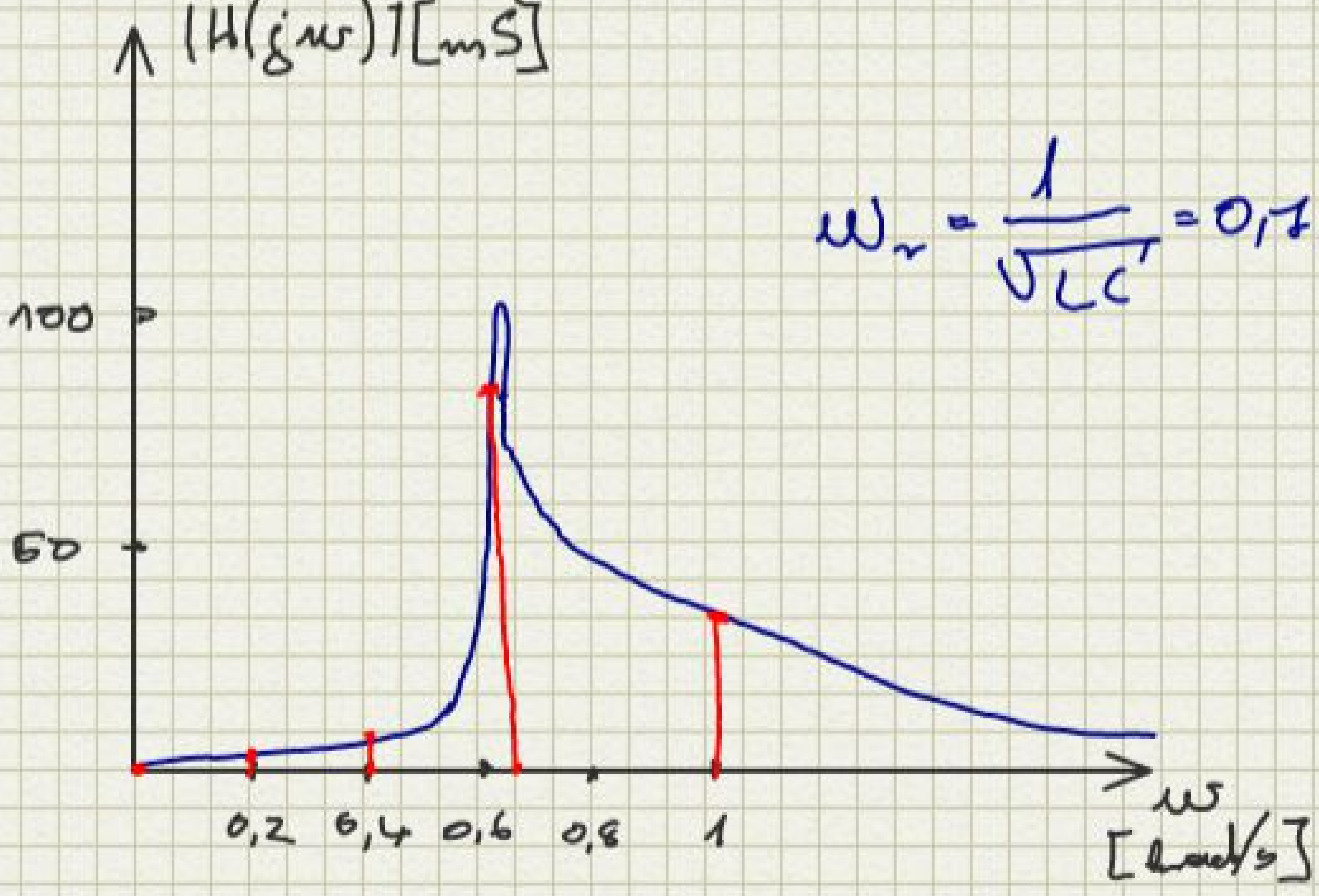
c.) Válaszjel számítása (táblázatos módszer)

k	$\bar{U}_{s,k}$	$\omega = k\omega_0$	$\bar{H}_k = H(jk\omega_0)$	$\bar{I}_k = \bar{H}_k \cdot \bar{U}_{s,k}$
0	0,5	0	0	0
1	$4/\pi^2$	0,14	$0{,}58 e^{j1{,}56}$	$0{,}24 e^{j1{,}56}$
3	$4/9\pi^2$	0,42	$2{,}6 e^{j1{,}54}$	$0{,}11 e^{j1{,}54}$
5	$4/25\pi^2$	0,7	$81{,}4 \cdot e^{j0{,}62}$	$1{,}32 e^{j0{,}62}$
7	$4/49\pi^2$	0,98	$4{,}25 e^{-j1{,}52}$	$0{,}035 e^{-j1{,}52}$

$$i(t) \cong \{0 + 0{,}24\cos(\omega_0 t + 1{,}56) + 0{,}11\cos(3\omega_0 t + 1{,}54) +$$

$$+ 1{,}32\cos(5\omega_0 t + 0{,}62)\}\ mA$$

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 0{,}71\ \frac{krad}{s}$$



d) Hatásos teljesítmény, $P_{RLC} = ?$

-/Parseval/ (1.) $P_{RLC} = \frac{1}{T}\int_0^T u_s(t)\, i(t)\, dt \cong 0{,}5\cdot 0 + \frac{1}{2}\frac{4}{\pi^2}\Big[$

$\Big[1\cdot 0{,}25\cdot \cos(1{,}56) + \frac{1}{9}\cdot 0{,}11\cos(1{,}54) + \frac{1}{25}\cdot 1{,}32\cos(0{,}62)\Big]\Big]$

$= 0{,}0093 W = \underline{\underline{9{,}3\,\mu W}}$

(2.) $P_{RLC} = P_R = R I^2_{eff}$

$I^2_{eff} = \frac{1}{2}\left(0{,}24^2 + 0{,}11^2 + 1{,}32^2\right) \approx 0{,}906\, A, \quad R = 0{,}01\, k\Omega$

$\underline{\underline{P_R \cong 0{,}0091\, mW}}$

$X_k^c \to 2|X_k^c|$

$X_k^c \to \text{arc}\, X_k^c$

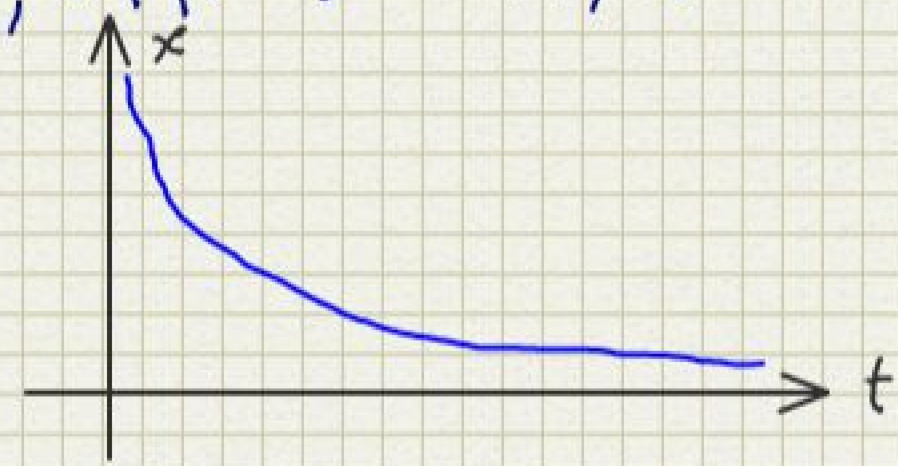
JELEK ÉS RENDSZEREK ÁLTALÁNOS LEÍRÁSA A FREKVENCIATARTOMÁNYBAN

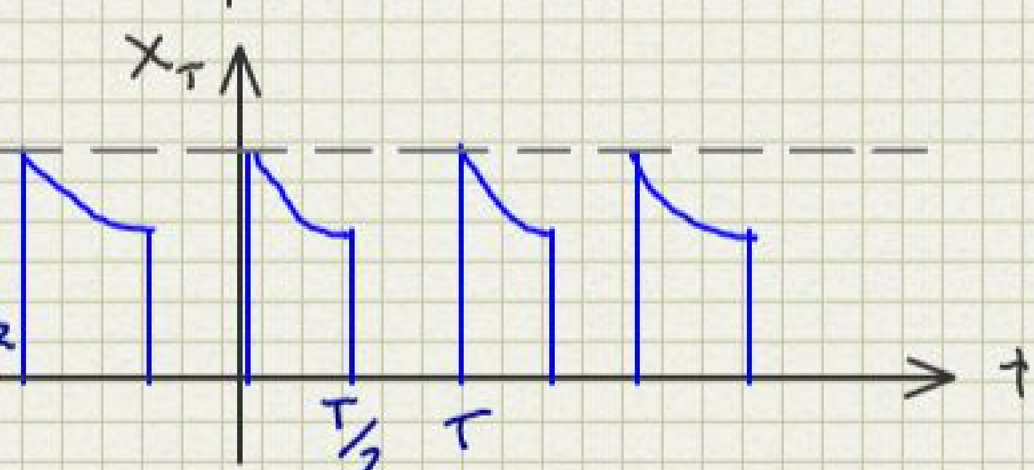
I. FOLYTONOS IDEJŰ FOURIER-TRANSZFORMÁCIÓ

1.) Alapgondolat, „rávezetés”

$x(t)$ nem periodikus jel $\rightarrow$ legyen $x_T(t) =$

$$= \begin{cases} x(t), & 0 \le t < \frac{T}{2} \\ 0, & \frac{T}{2} \le t < T \end{cases}, \quad x_T(t+T) = x_T(t), \forall t$$





formális jelölés: $X_T(jk\omega_0) = X^c_{T,k}$

$x_T(t)$ Fourier-sora:

$T \to \infty$

$x_T(t) \to x(t)$

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^c_{T,k} e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X_T(jk\omega_0) \cdot e^{jk\omega_0 t} \cdot \omega_0$$

$$X^c_{T,k} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$T \to \infty$: $\omega_0 \to 0$ $(d\omega)$ infinitezimális

$k\omega_0 \to \omega$ folytonos

$x_T(t) \to x(t)$

$X_T(jk\omega_0) \to X(j\omega)$

2.) Def:

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \cdot e^{j\omega t}\, d\omega \equiv \mathcal{F}^{-1}\{x(j\omega)\}}$$

Ahol $x(j\omega)$ az $x(t)$ spektruma.

$$\boxed{X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \equiv \mathcal{F}\{x(t)\}}$$

, ha

$x(t)$ abszolút integrálható, $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$ (elégséges)

→ $X(j\omega)$ spektrum

→ $|X(j\omega)|$ amplitúdóspektrum

→ $\arc X(j\omega)$ fázisspektrum

→ $\frac{1}{2\pi} X(j\omega)$ amplitúdósűrűség

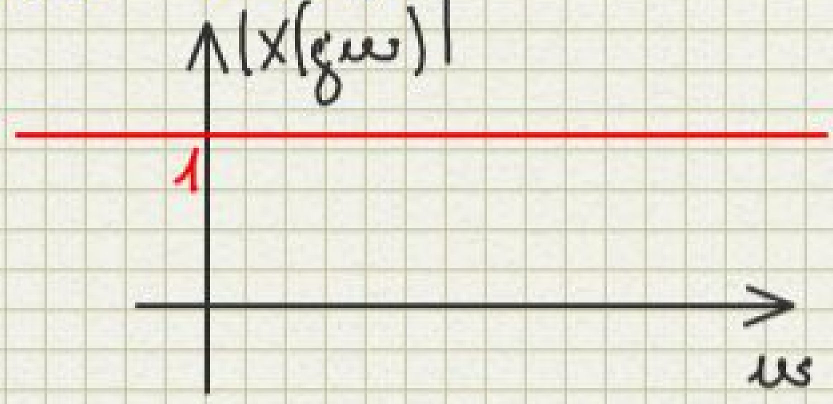
értelmezés:

$$dx = \underbrace{\frac{1}{2\pi} X(j\omega)\, d\omega}_{\text{komplex ampl.}}\ \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{„színusz"}}$$

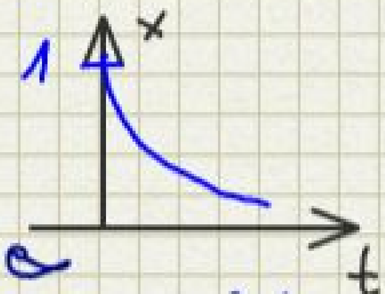
ha $x(t)$ valós $\Leftrightarrow X(j\omega) = X^*(-j\omega)$

3.) Példák

a) $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = 1$



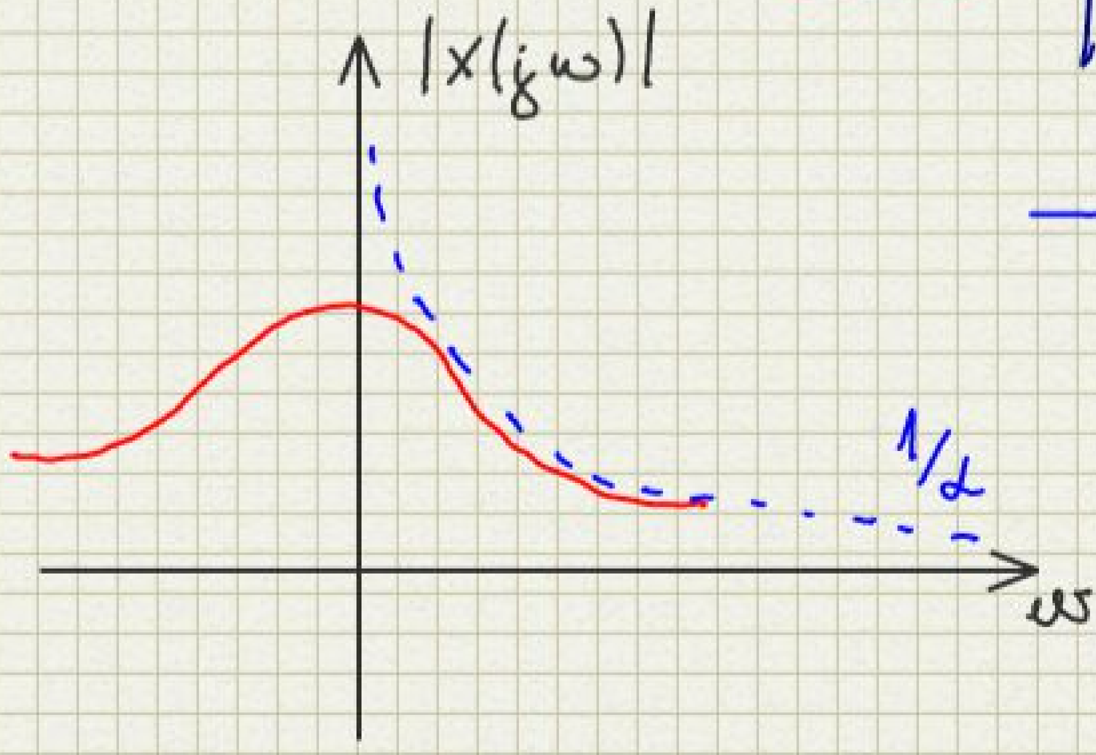
b) $x(t) = \varepsilon(t)\, e^{-\alpha t}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+$

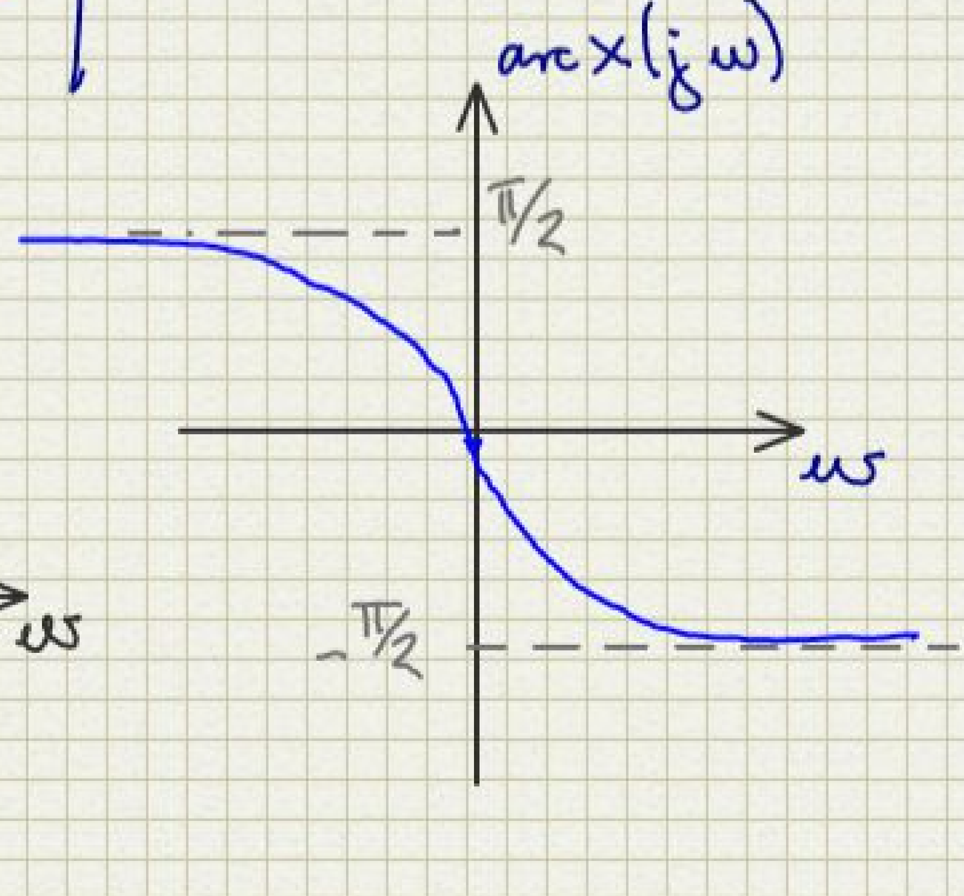


$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t}\, dt =$$

$$= \left[\frac{e^{-(\alpha + j\omega)t}}{-(\alpha + j\omega)} \right]_0^{\infty} = \underline{\underline{\frac{1}{\alpha + j\omega}}}$$

$$\begin{cases} |X(j\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \\ \operatorname{arc} X(j\omega) = -\operatorname{arctg} \dfrac{\omega}{\alpha} \end{cases}$$





ha $x(t)$ valós: $|X(j\omega)| = |X(-j\omega)|$ páros

$\quad\quad \text{arc } X(j\omega) = -\text{arc } X(-j\omega)$ ptlan

$x(t)$ páros $\Rightarrow X(j\omega)$ valós

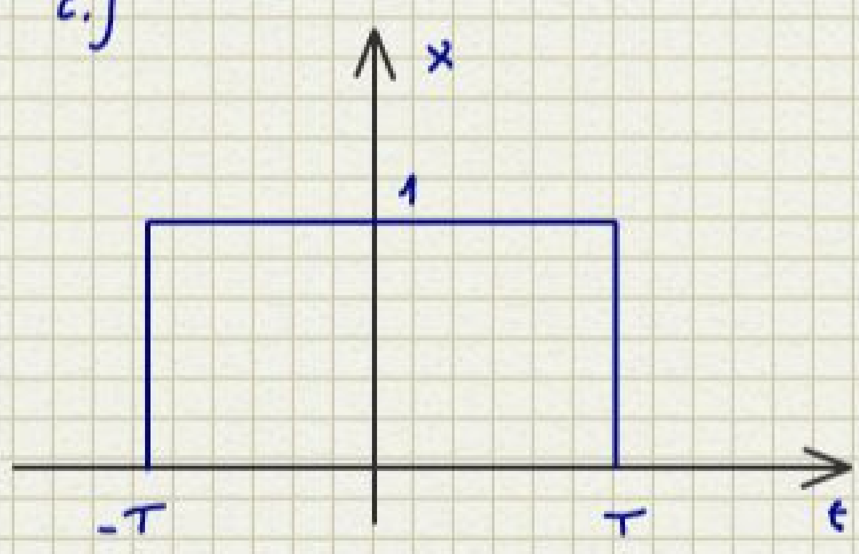
$x(t)$ ptlan. $\Rightarrow X(j\omega)$ tisztán képzetes.

DEF: Az ⊙ $x(t)$ jel időkorlátos $\Leftrightarrow \exists T: x(t)=0,\ |t|>T$ sávkorlát

⊙ $x(t)$ sávkorlátozottság $\Leftrightarrow \exists \Omega: X(j\omega)=0,\ |\omega|>\Omega$

3.) Példák

c.)



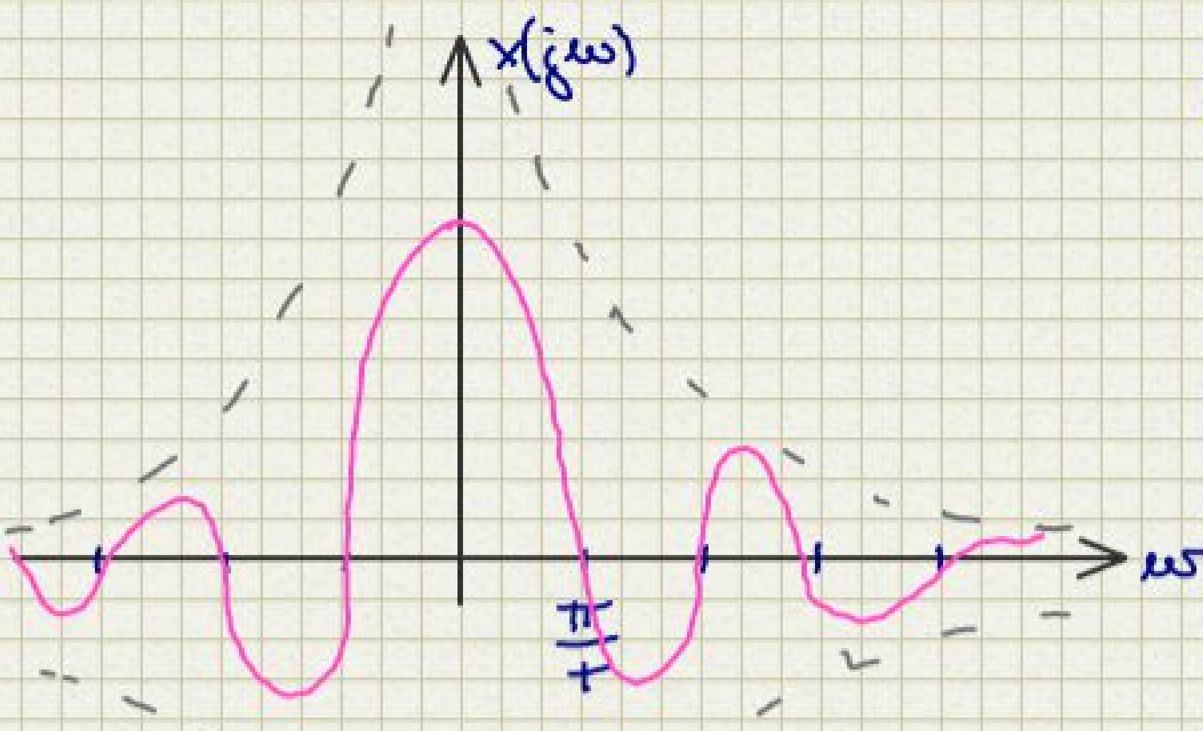
$$x(t) = \varepsilon(t+T) - \varepsilon(t-T)$$

$$X(j\omega) = \int_{-T}^{T} 1 \cdot e^{-j\omega t}\, dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-T}^{T} = \frac{e^{-j\omega T} - e^{j\omega T}}{-j\omega} = 2\frac{\sin \omega T}{\omega} =$$

$$= 2T \frac{\sin(\omega T)}{\omega T}$$

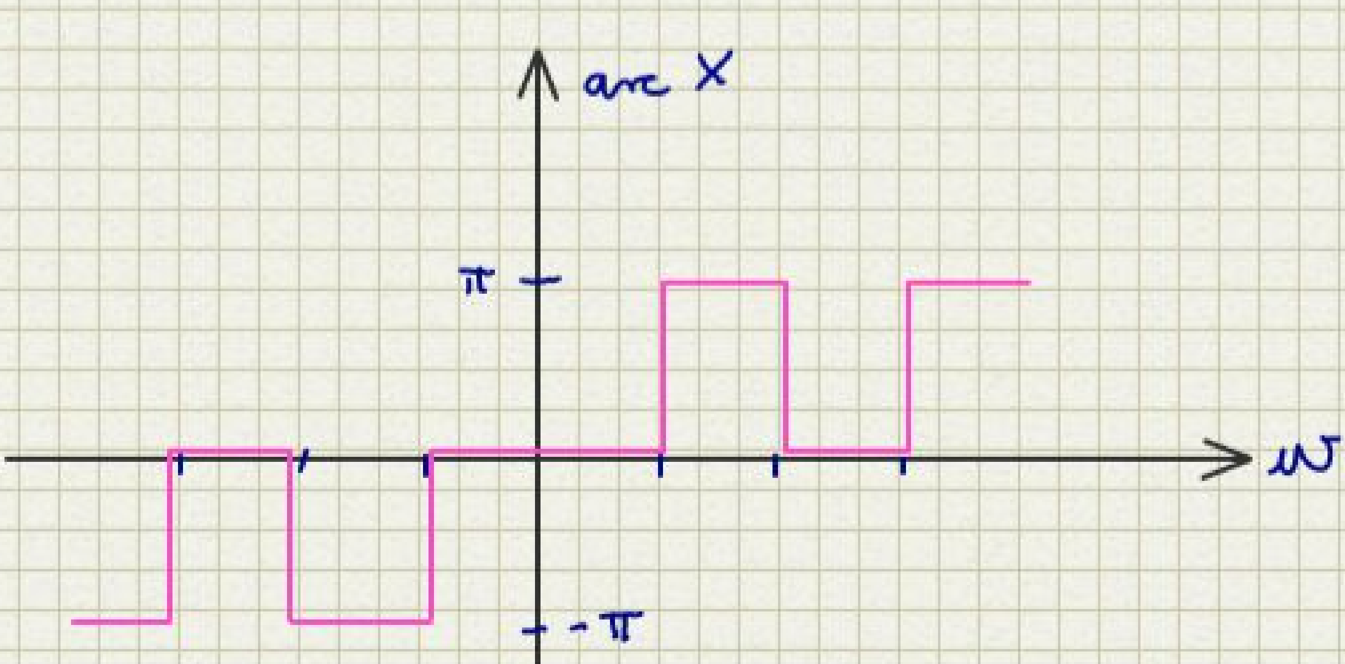
zérushely: $\omega T = k\pi$

$$\omega = k\frac{\pi}{T}$$



$$\lim_{\omega \to 0} \frac{\sin(\omega T)}{\omega T} = 1$$

burkológörbe: $2T\frac{\pm 1}{\omega T} = \frac{\pm 2}{\omega}$



d.) $x(t) = e^{-(\alpha t)^2}$ Gauss-féle haranggörbe

$$X(j\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)^2} \rightarrow \text{Gauss!}$$

(sajátfüggvény)

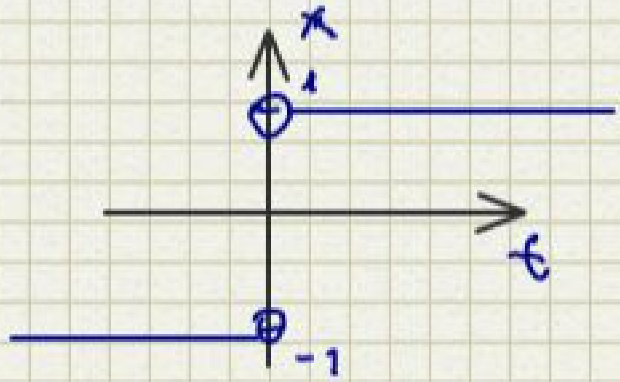
(pl. exp. fgv. differenciálása)

e.) $x(t) = 1$ nem absz. int. ható

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega) \text{, mert } x(t) = \frac{1}{\cancel{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cancel{2\pi}\,\delta(\omega) e^{j\omega t} \, d\omega = 1$$

f.) $x(t) = \text{sign}(t)$

$$X(j\omega) = \frac{2}{j\omega}$$



(4.) TÉTELEK

a) $\mathcal{F}\{\}$, $\mathcal{F}^{-1}\{\}$ lineáris

pl: $\mathcal{F}\{c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)\} = c_1 \mathcal{F}\{x_1(t)\} + c_2 \mathcal{F}\{x_2(t)\}$

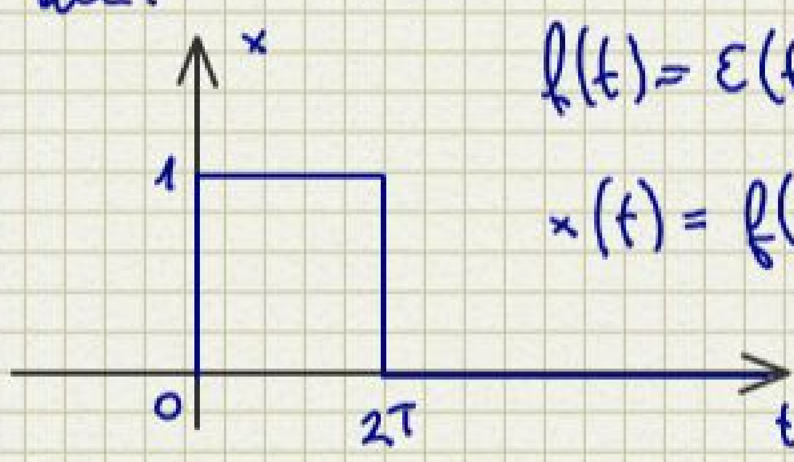
alk: $x(t) = \varepsilon(t) = \frac{1}{2}(1 + \text{sign}(t)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sign}(t)$

$$X(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

b.) Eltolási tétel

$$\boxed{\mathcal{F}\{x(t-T)\} = e^{-j\omega T} \cdot \mathcal{F}\{x(t)\}}$$

alk:



$f(t) = \varepsilon(t+T) - \varepsilon(t-T)$

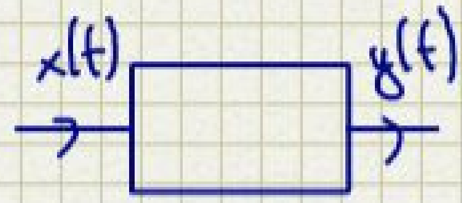
$x(t) = f(t-T) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-2T)$

$$X(j\omega) = e^{-j\omega T} \cdot 2T \cdot \frac{\sin(\omega T)}{\omega T}$$

$|X(j\omega)| = 1 \cdot 2T \left| \frac{\sin(\omega T)}{\omega T} \right|$ nem változott c.) Modulációs

$$\boxed{\mathcal{F}\{x(t)\cdot e^{j\omega_0 t}\} = X(j(\omega-\omega_0))}$$ ha $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega)$

Pl. 1: amplitúdó-moduláció, AM



$$y(t) = x(t)\cdot\cos(\omega_0 t)$$

$y(t)$ a modulált jel

$\cos(\omega_0 t)$ vivőjel

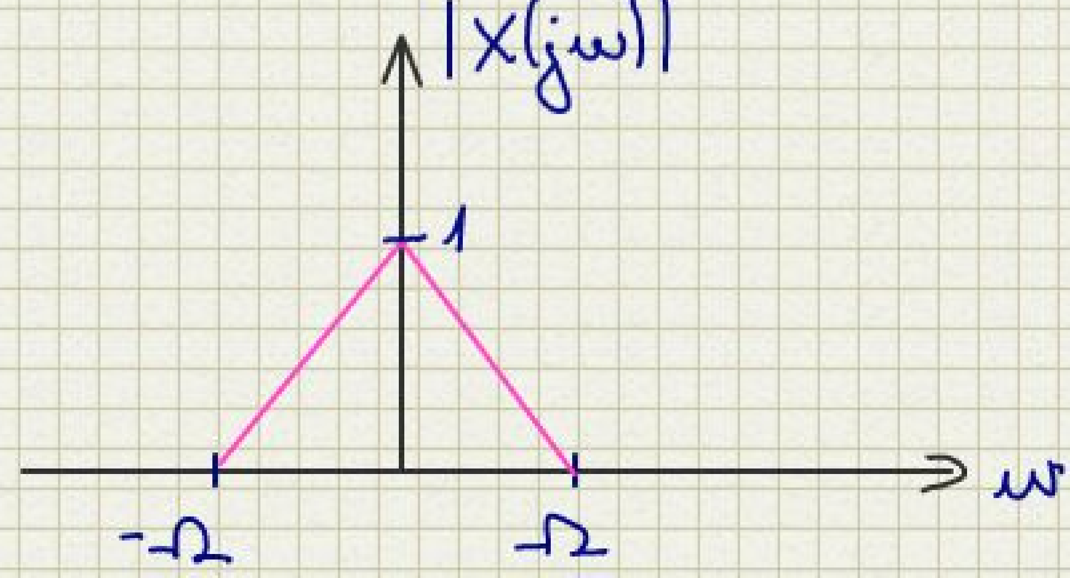
ω_0 vivőfrekvencia

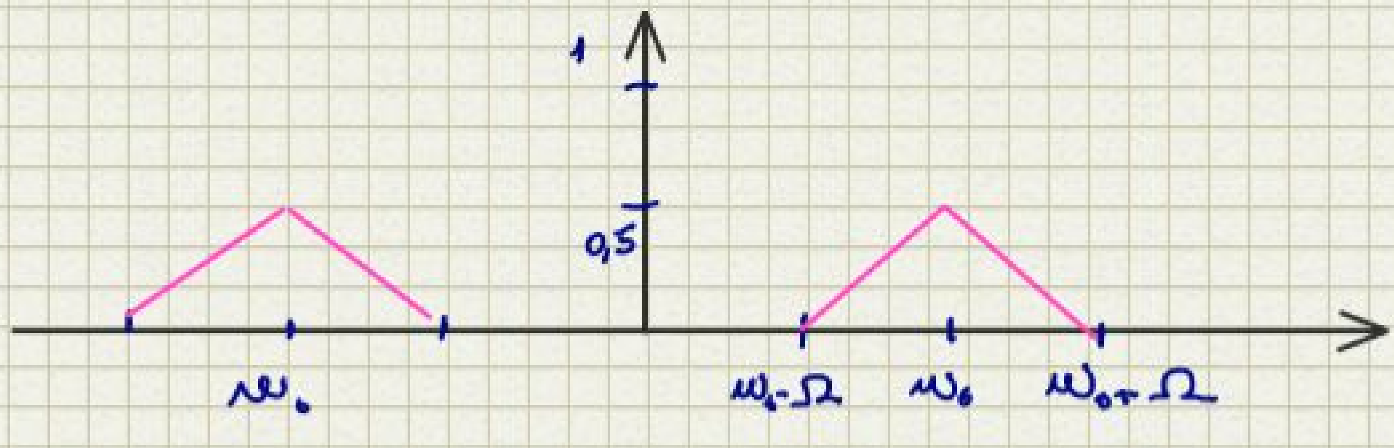
$$y(t) = x(t)\,\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}\cdot x(t) + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}\,x(t)$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2}\left[X(j(\omega+\omega_0)) + X(j(\omega-\omega_0))\right]$$

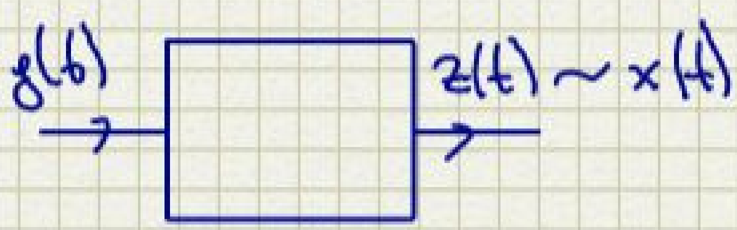
szemlélet: fth. $x(t)$ sávkorlátozott (Ω)

$\omega_0 > \Omega$





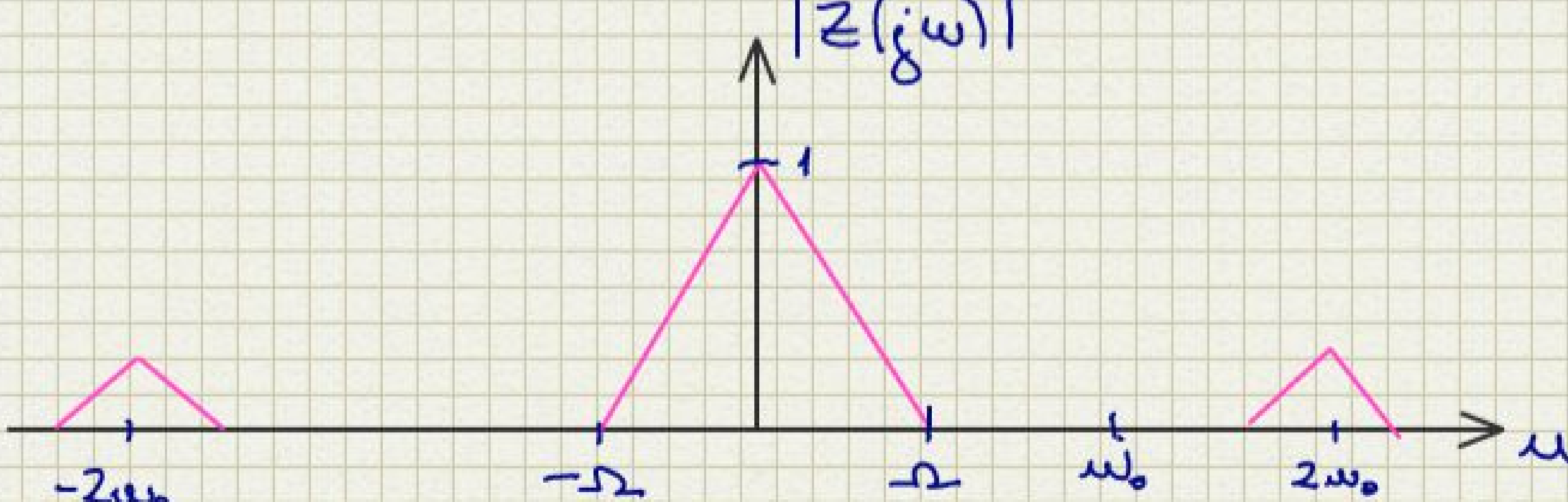
demoduláció



$$z(t) = y(t)\,2\cos(\omega_0 t) = x(t)\,2\cos^2(\omega_0 t) = x(t)\left[1+\cos(2\omega_0 t)\right] =$$

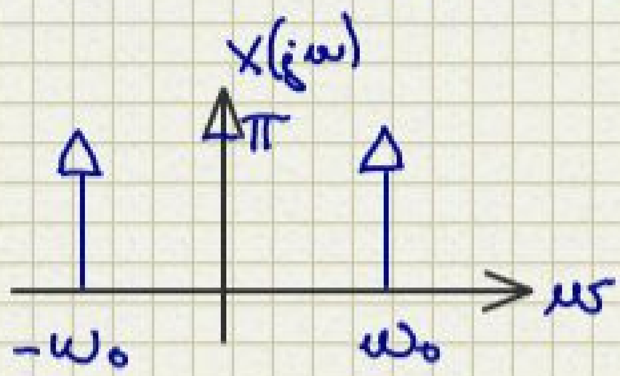
$$= x(t) + x(t)\cos(2\omega_0 t)$$

$$Z(j\omega) = X(j\omega) + \ldots$$

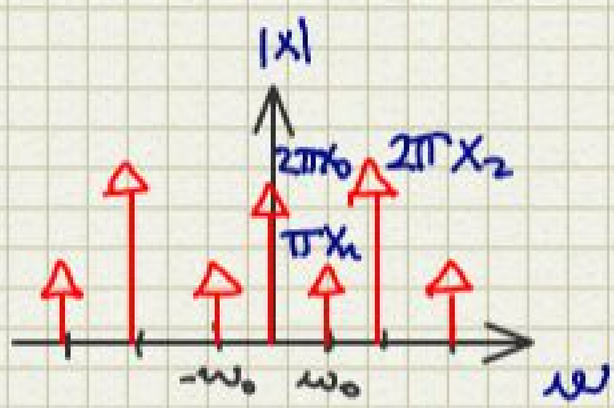


alk(2) periodikus jelek spektruma

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \pi\delta(\omega+\omega_0) + \pi\delta(\omega-\omega_0)$$



Ha $x(t) = X_0 + X_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1) + X_2\cos(2\omega_0 t + \varphi_2) + \dots$



d) <u>Deriválási tétel</u>

$$\boxed{\mathcal{F}\{x'(t)\} = j\omega\,\mathcal{F}\{x(t)\}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt = \underbrace{\left[x(t)\,e^{-j\omega t}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{0 \text{ mert } x(t) \text{ absz. int-ható}} -$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\frac{d}{dt}\left(e^{-j\omega t}\right)dt = j\omega \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt}_{= X(j\omega)}$$

e.) Integrálási tétel

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(j0)\cdot\delta(\omega)$$

f.) Skálázási tétel

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right), \text{ ahol } X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

g.) Konvolúció tétel

$$\mathcal{F}\{u(t) * v(t)\} = \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) v(t-\tau)\,d\tau\right\} =$$

$$= U(j\omega)\cdot V(j\omega) \rightarrow \text{biz.: } \mathcal{F}^{-1}\{U(j\omega)\cdot V(j\omega)\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega)\cdot V(j\omega)\, e^{j\omega t}\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}\,d\tau\right\} V(j\omega)\, e^{j\omega t}\,d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\left\{\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} V(j\omega)\, e^{j\omega(t-\tau)}\,d\omega}_{v(t-\tau)}\right\}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) v(t-\tau)\,d\tau$$

h) Parseval-tétele a jel energiájára vonatkozóan

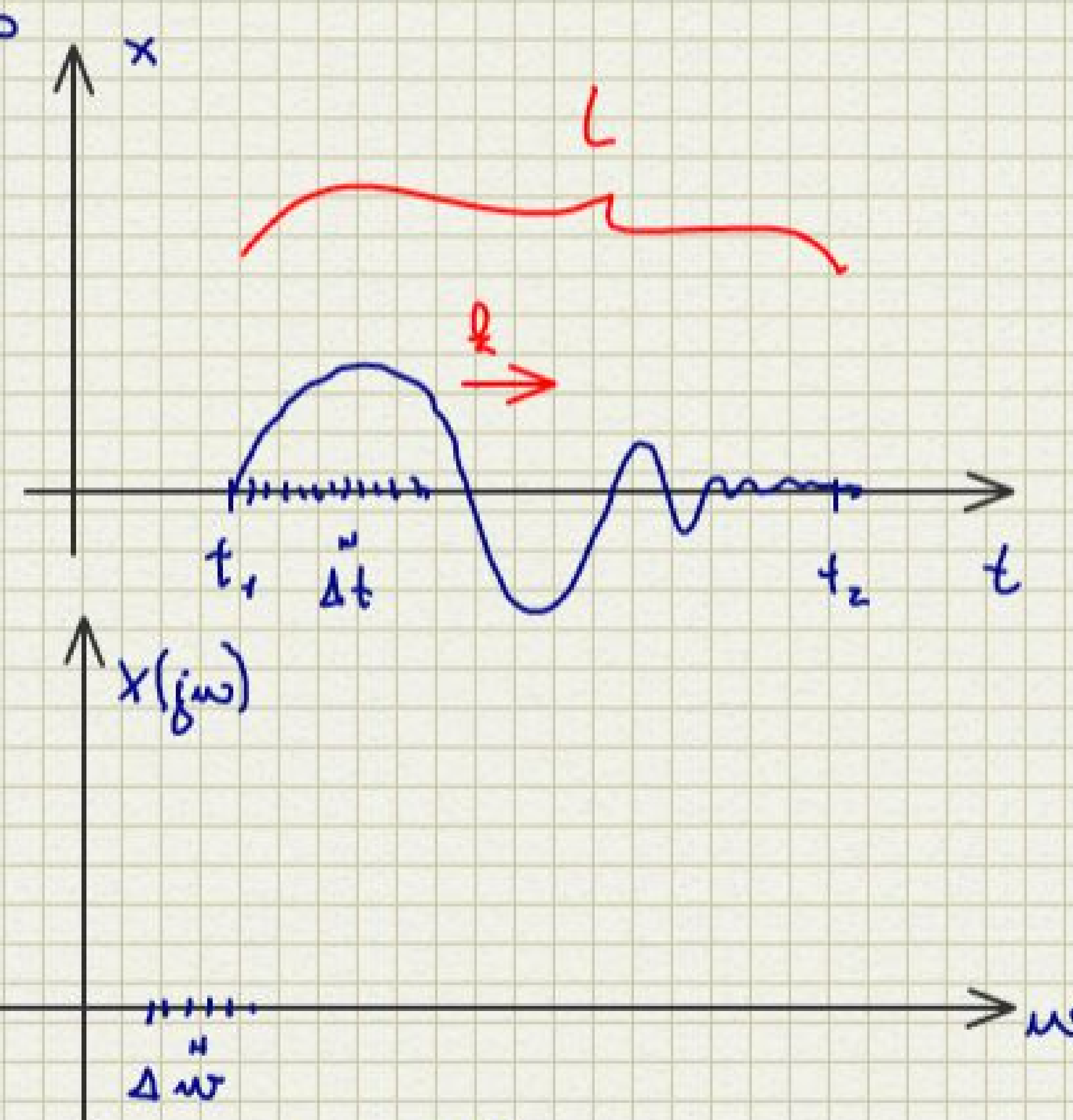
$$E_x \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

energiaspektrum

6.) Numerikus számítás

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$t_2 - t_1 = L \cdot \Delta t$$



$$X(jp\Delta\omega) \cong \sum_{l=0}^{L-1} x(t_1 + l\Delta t) \cdot e^{-jp\Delta\omega(t_1 + l\Delta t)}$$

$$= \Delta t \cdot e^{-jp\Delta\omega \cdot t_1} \overbrace{\sum_{l=0}^{L-1} x(t_1 + l\Delta t) \cdot e^{-jp\Delta\omega\Delta t \cdot l}}^{\text{FFT ?}}$$

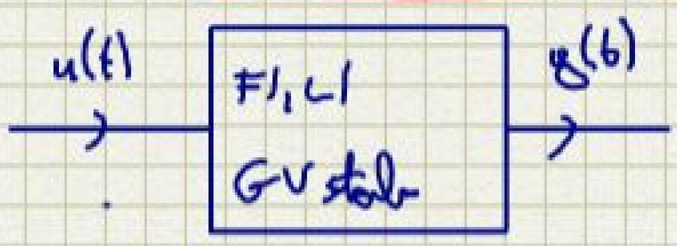
FFT alkalm. ha

$$-jp\Delta\omega\Delta t\cdot k = -jpk\frac{2\pi}{L}$$

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{L\Delta t} = \frac{2\pi}{t_2-t_1}$$

II. JELÁTVITEL VIZSGÁLATA FREKVENCIATARTOMÁNYBAN

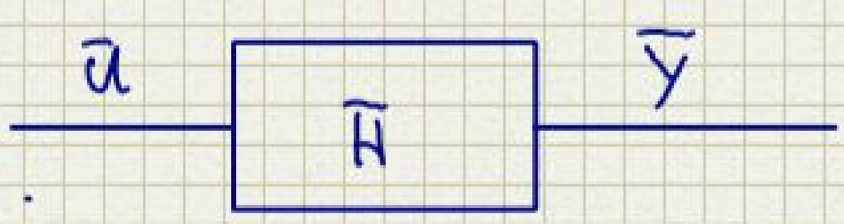
1.) A válasz spektrális előállítása



tfh: $u(t)$ absz. int. ható

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega)\cdot e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$du = \underbrace{\frac{1}{2\pi}U(j\omega)\,d\omega}_{\text{komplex amplitúdó}}\cdot\underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{általánosított szinuszjel}} = \bar{U}\cdot e^{j\omega t}$$



$\bar{Y} = \bar{H}\bar{U}$, $\bar{H} = H(j\omega)$

$$dy = \bar{Y}\cdot e^{j\omega t} = \bar{H}\bar{U}\cdot e^{j\omega t} = \frac{1}{2\pi}H(j\omega)\cdot\bar{U}\cdot d\omega\cdot e^{j\omega t}$$

$$y(t) = \int dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)U(j\omega)\cdot e^{j\omega t}\,d\omega$$

másfelől: $y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$

$$\boxed{Y(j\omega) = H(j\omega)\cdot U(j\omega)}$$

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\cdot \mathcal{F}\{u(t)\}\} = \mathcal{W}\{u(t)\}$$

$|Y(j\omega)| = K(\omega)\cdot|U(j\omega)|$ erősítés

$\operatorname{arc} Y(j\omega) = \operatorname{arc} U(j\omega) + \varphi(\omega)$

fázistolás

b.) $H(j\omega)$ formális def.-ja

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}}$$

c.) Impulzusválasz

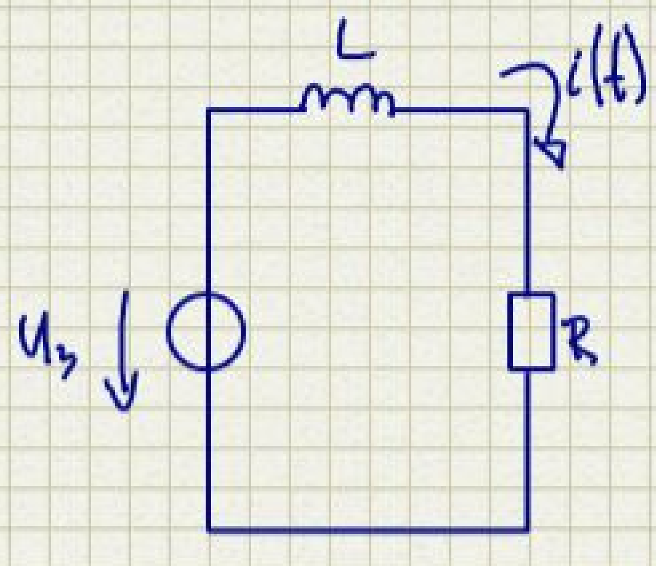
$u(t) = \delta(t) \rightarrow U(j\omega) = 1$

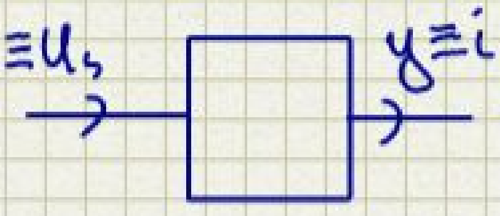
$y(t) = h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\cdot 1\} \rightarrow \boxed{H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}}$

ez konzisztens a konvolúciótétellel.

$$y(t) = h(t) * u(t) \Leftrightarrow Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot U(j\omega)$$

1.) Példa





$$I(j\omega) = \frac{U_s(j\omega)}{R + j\omega L} \Longrightarrow H(j\omega) \triangleq \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{I(j\omega)}{U_s(j\omega)} =$$

$$= \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{\frac{1}{L}}{j\omega + \frac{R}{L}}$$

$$\text{pl: } h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\} = \varepsilon(t)\, \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$$

2.) Ideális (torzításmentes) jelátvitel

feltétele: $\boxed{y(t) = C \cdot u(t - t_0)}$

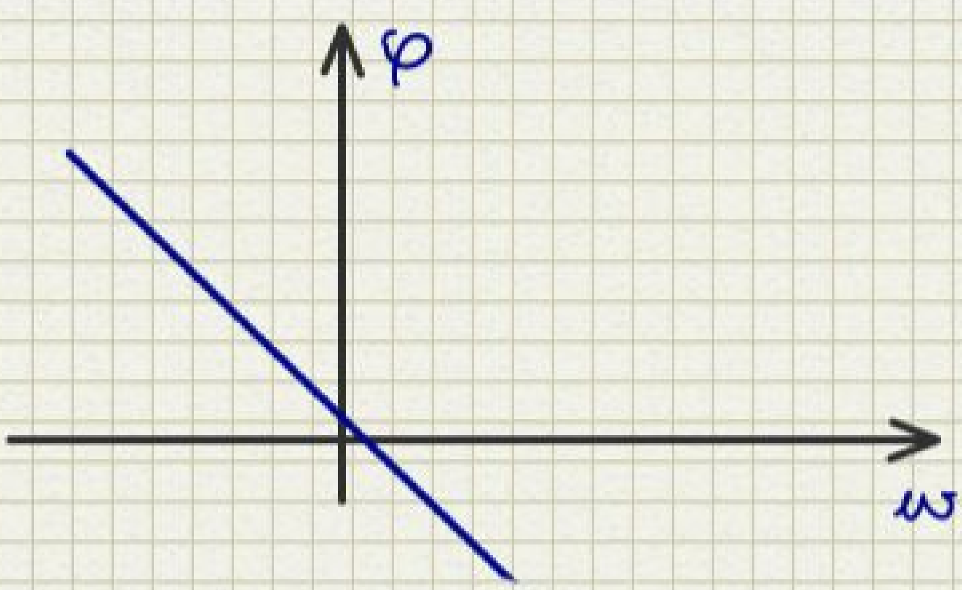
spektrum: $Y(j\omega) = C \cdot e^{-j\omega t_0}\, U(j\omega)$

$$\Longrightarrow H(j\omega) \triangleq \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = C \cdot e^{-j\omega t_0}$$

$K(\omega) = C$ (konst.)

$\varphi(\omega) = -\omega t_0$ (lin.)

„mindentáteresztő", „lineárfázisú" rendszer.



3.) A rendszerátviteli tulajdonságok

a.) Áteresztő tartomány $[\omega_a, \omega_f]$ továbbiakban: $K_m = \max\limits_{\omega} K(\omega)$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \cdot K_m \le K(\omega) \le K_m}\text{, ha } 0 \le \omega_a \le \omega \le \omega_f$$

$0 < \varepsilon \le 1$ pl: $\varepsilon = 1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot K_m \le K(\omega)$

Bode [dB] $\rightarrow k_m - 3dB \le k(\omega)$

b) záró tartomány $[\omega_c ; \omega_d]$

$$\boxed{0 \le K(\omega) \le \eta \cdot K_m}\text{, ha } 0 \le \omega_c \le c \le \omega_d$$

pl: $\eta = 0{,}1 \rightarrow K(\omega) \le 0{,}1\ K_m$

$\rightarrow$ [dB] $k(\omega) \le k_m - 20dB$

c.) Átmeneti tartomány ...

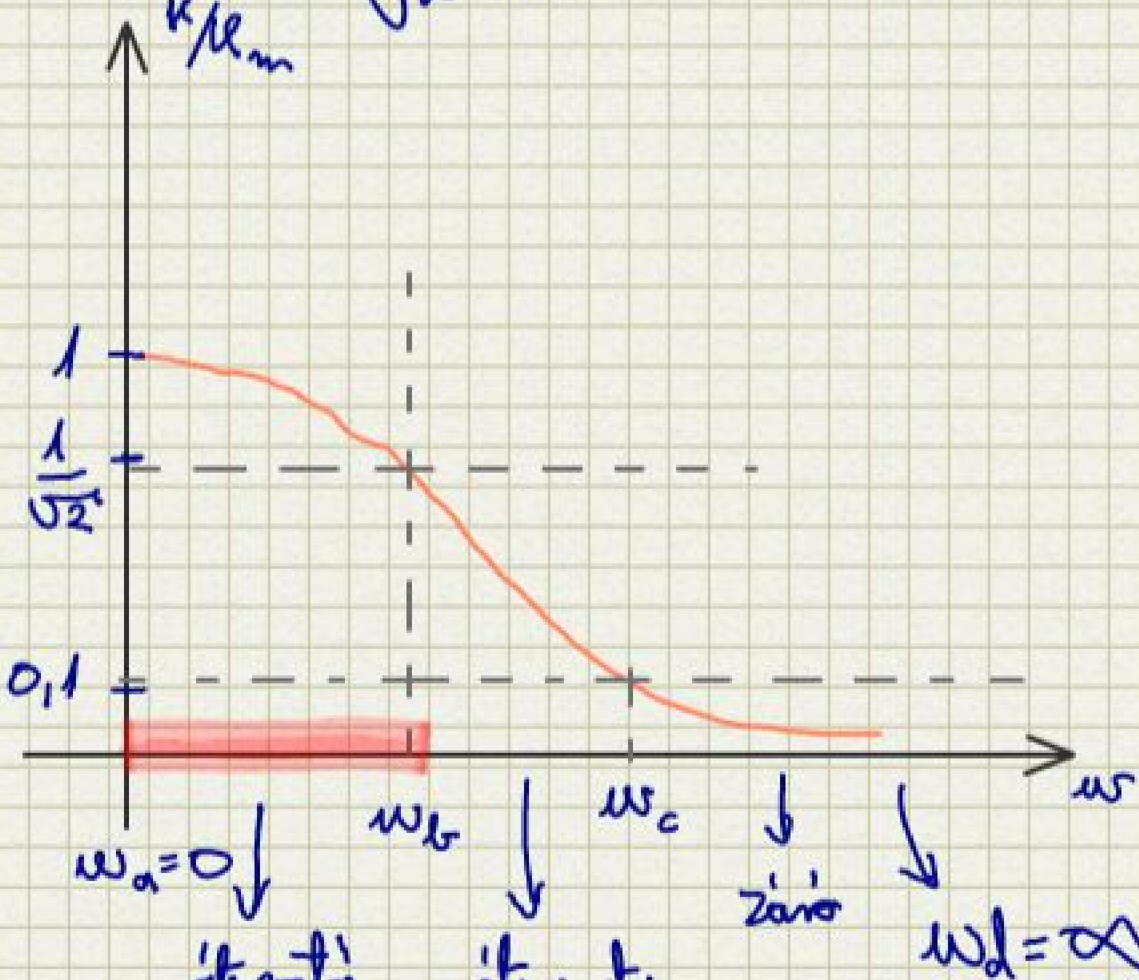
d.) Sávszélesség $\boxed{\Delta\omega_H = \omega_b - \omega_a}$

e.) Példa

$$H(j\omega) = \frac{1/L}{j\omega + \frac{R}{L}} = \frac{A}{j\omega + \alpha}$$

legyen $\varepsilon = 1$; $\eta = 0{,}1$

$$K(\omega) = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \rightarrow K_m = K(0) = \frac{A}{\alpha}$$



átereszto $(\omega_b) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot K_m = \frac{A}{\sqrt{\omega_b^2 + \alpha^2}} \rightarrow \omega_b^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2$

$K_m = \frac{A}{\alpha}$

$\omega_b = \pm\alpha$

záró $(\omega_c) \Rightarrow 0{,}1 \cdot K_m = 0{,}1 \frac{A}{\alpha} = \frac{A}{\sqrt{\omega_c^2 + \alpha^2}} \rightarrow \omega_c = \sqrt{99}\,\alpha \approx 10\alpha$

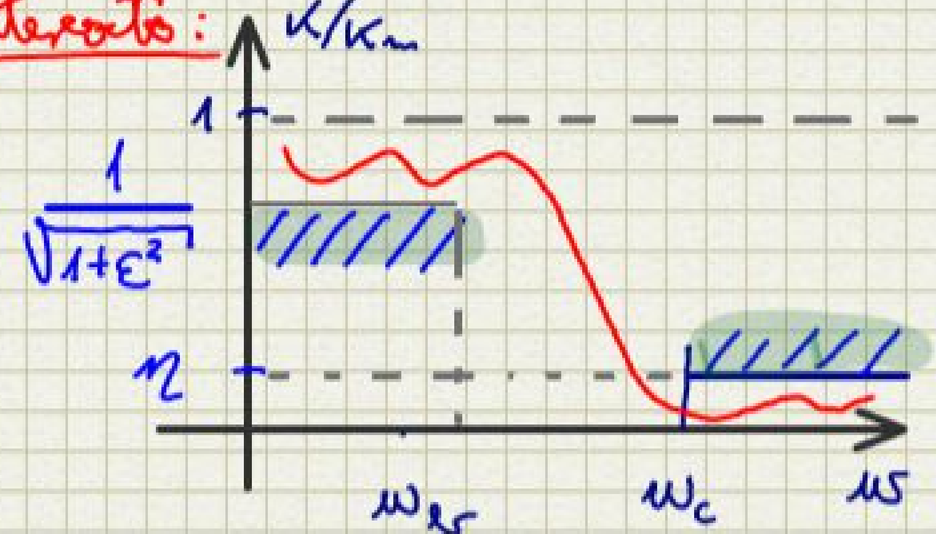
$$\Delta\omega_H = \omega_b - \omega_a = \alpha = \frac{R}{L}$$

„aluláteresztő"

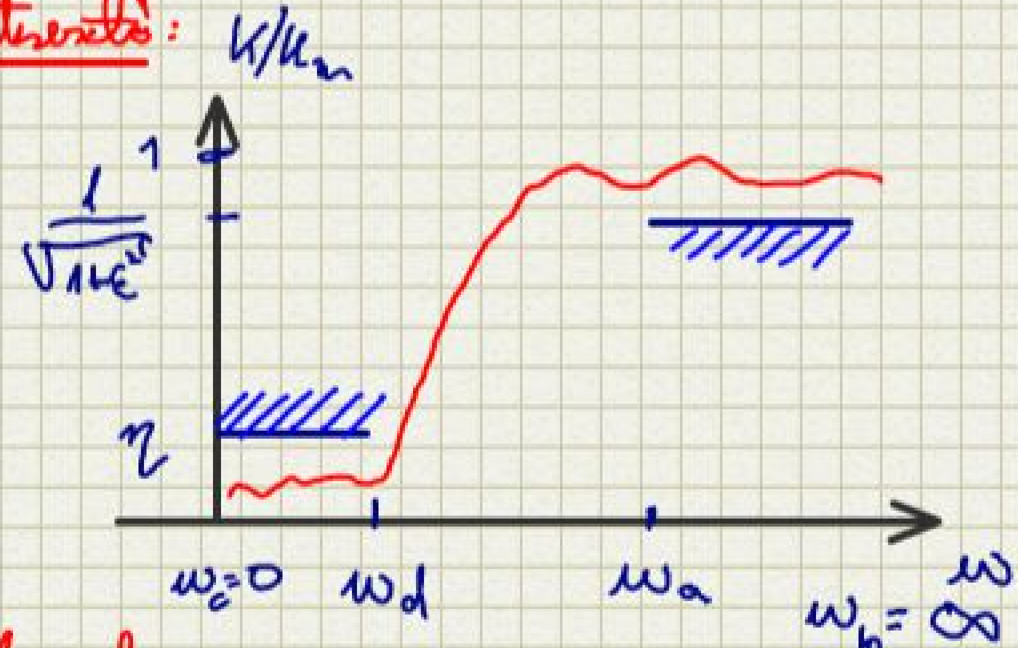
4.) Szűrők toleranciasémái

alulátersztő:

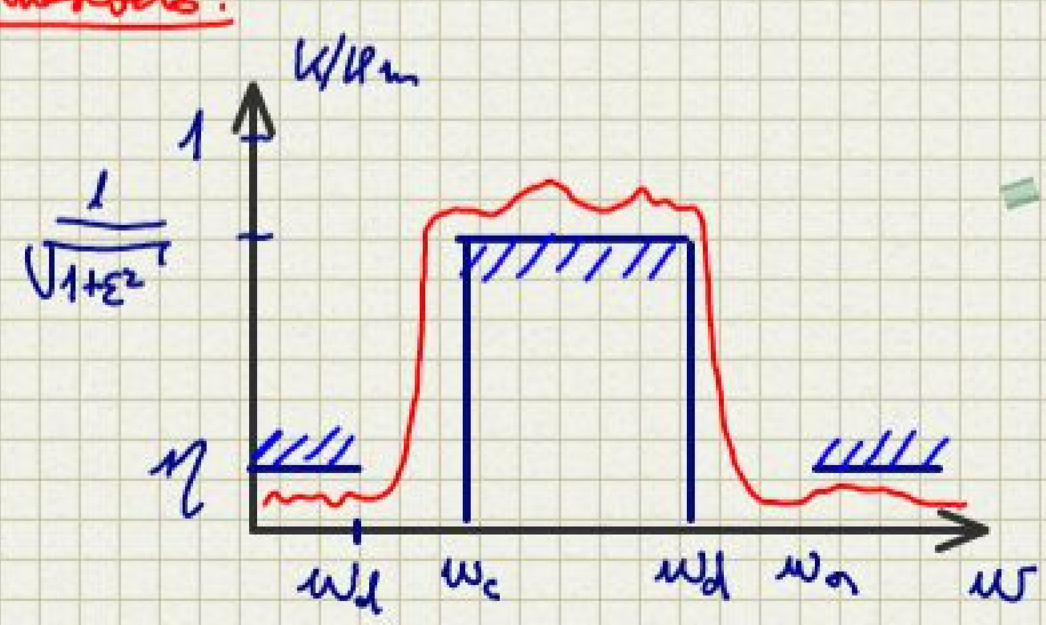
$[\omega_b; \varepsilon; \omega_c; \eta]$



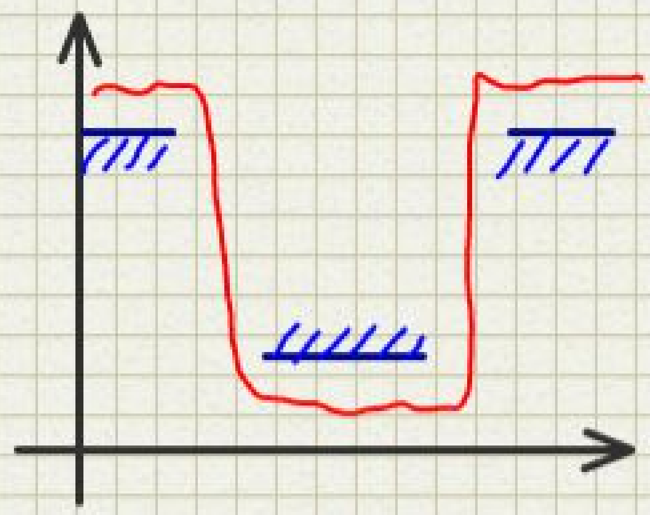
felülátersztő:



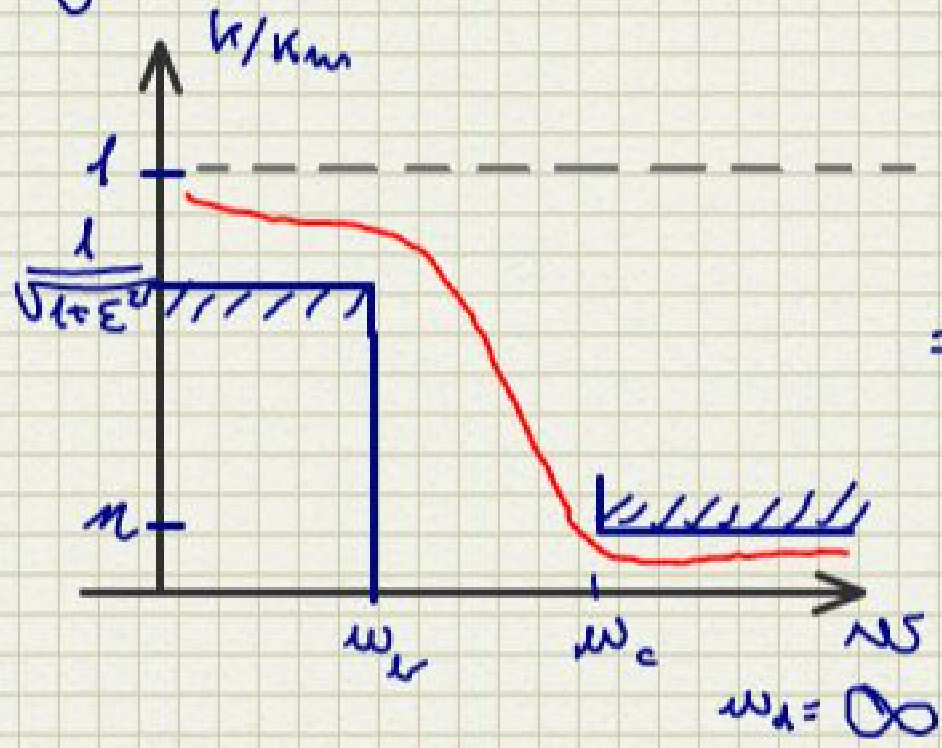
sáváteresztő:



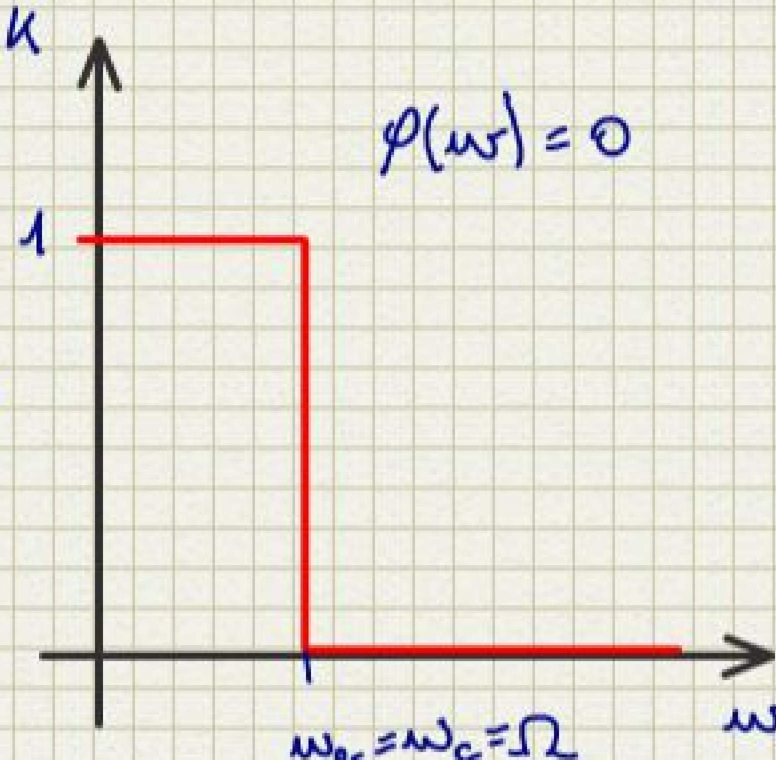
d.) sávzárás:



g.) Ideális aluláteresztő



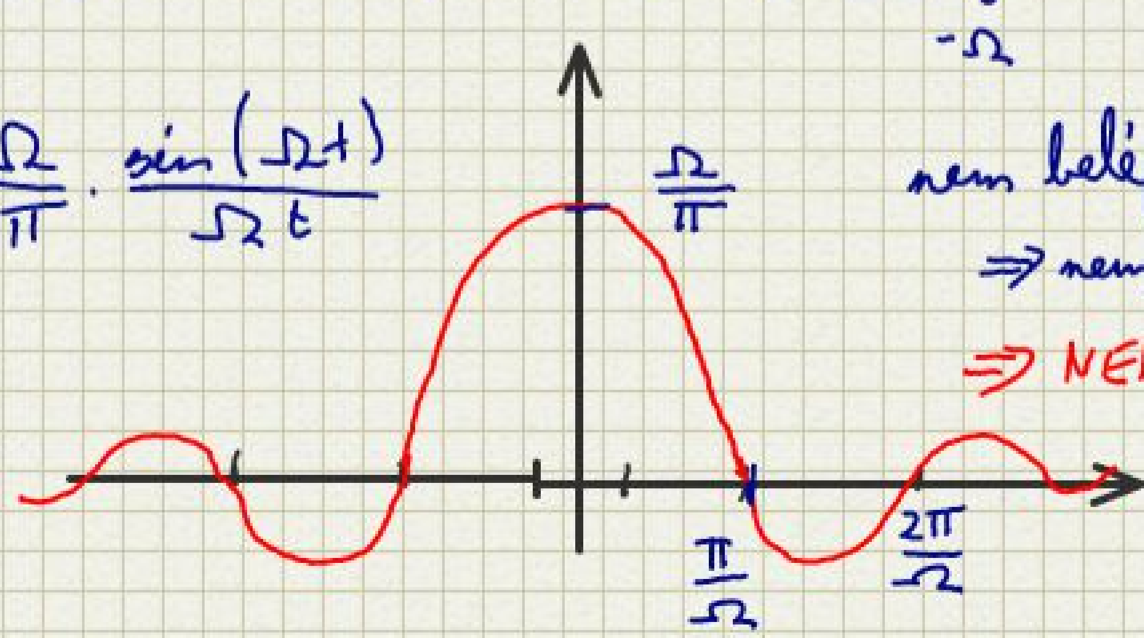
$\Longrightarrow$



$$H_{I.A.A'}(j\omega) = \varepsilon(\omega+\Omega) - \varepsilon(\omega-\Omega)$$

$$h_{I.A.A'}(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{H_{IAA'}(j\omega)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega} 1\cdot e^{j\omega t}\,d\omega = \ldots =$$

$$= \frac{\Omega}{\pi}\cdot\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t}$$



nem belépő

$\Rightarrow$ nem kauzális

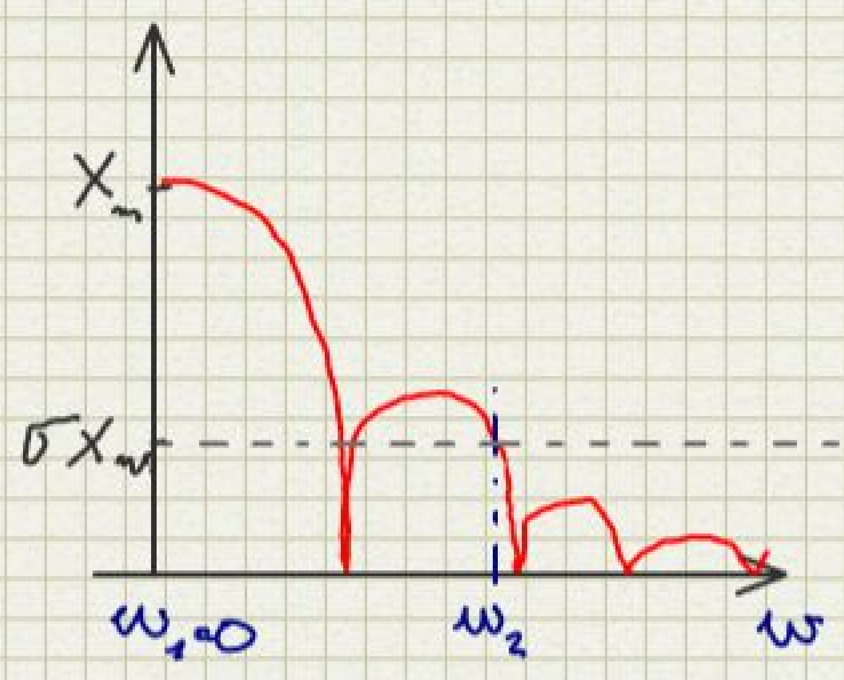
$\Rightarrow$ NEM MEGVALÓSÍTHATÓ!

4.) A jel sávszélessége $[\omega_1, \omega_2]$ $\Delta\omega_x = \omega_2 - \omega_1$

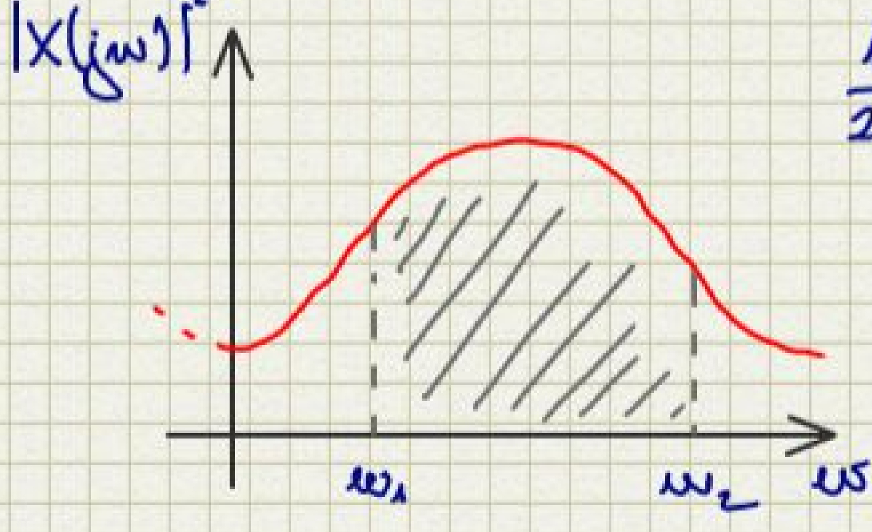
a.) Amplitúdóspektrum alapján

$$\boxed{|X(j\omega)| \leq \sigma X_m} \quad , \ \omega \notin [\omega_1, \omega_2]$$

$$X_m = \max_{\omega} |X(j\omega)|$$



b.) Energiaspektrum alapján



$$\frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |X(j\omega)|^2 \, d\omega = \sigma E_x ,$$

$$\text{ahol } E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 \, d\omega$$

$$+ \text{ feltétel pl: } \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \arg \max_{\omega} |X(j\omega)|^2$$

4.) Sávszélesség és jelszélesség kapcsolata

sávkorlátozott $\Leftrightarrow$ időkorlátozott

$\hookrightarrow \approx \Delta\omega_x$ $\qquad$ $\hookrightarrow \approx \Delta t_x$ (időbeli kiterjedés)

$$\Delta\omega_x \sim \frac{1}{\Delta t_x}$$

5.) Közelítőleg alakhű jelátvitel

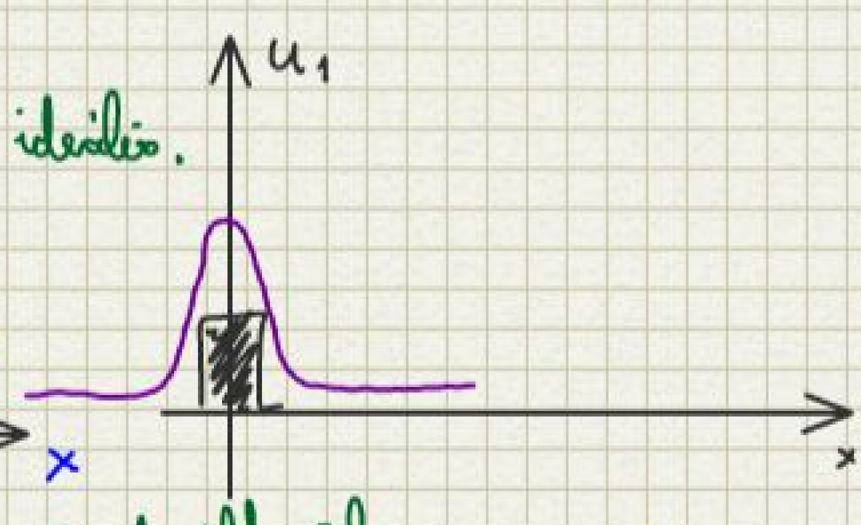
feltétel: $\left.\begin{array}{l} \omega_a \leq \omega_1 \\ \text{és} \\ \omega_f \geq \omega_2 \end{array}\right\}$ $\boxed{\Delta\omega_H \geq \Delta\omega_x}$ + lineáris fázis

6.) Példa

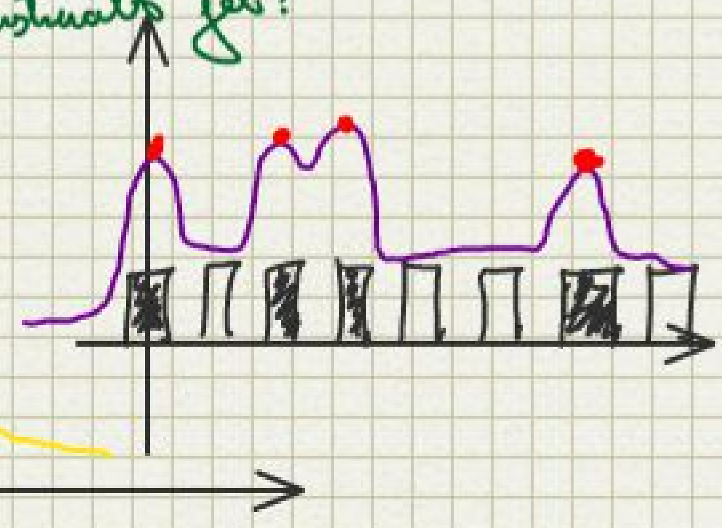
fémtárgyra kézzel beírt vonalkód kiolvasása térbeli inverz szűréssel

a) kapott

ideális.

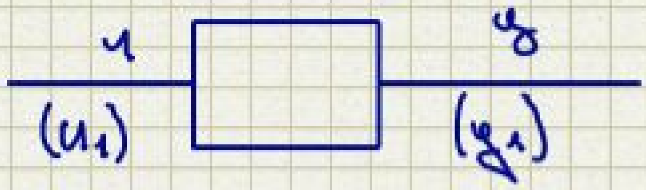


rekonstruált jel:



~ szuperpozíció

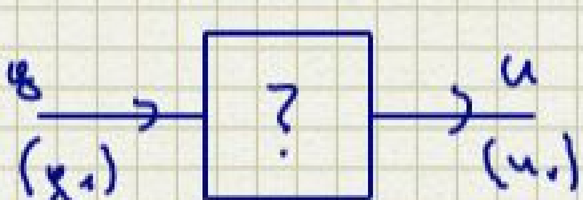
b) „Direkt" összefüggés



$$\sum_{i=0}^{N-1} a_i u_1(x - i\Delta x), \quad a_i = \begin{cases} 1, \text{ van vonal} \\ 0, \text{ nincs} \end{cases}$$

$$y(x) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i\, y_1(x - i\Delta x)$$ „térbeli konvolúció"

c) Inverz feladat v. rekonstrukció



frekvenciatartományban:

$x \rightarrow k_x$ térbeli frekvencia v. hullámszám

$$\mathcal{F}\{u_1(x)\} = U_1(jk_x)$$

$$\mathcal{F}\{y_1(x)\} = Y_1(jk_x)$$

$$U(jk_x) = \mathcal{F}\{u(x)\} = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \cdot \mathcal{F}\{u_1(x - i\Delta x)\} = \sum_{i=0}^{N-1} a_i U_1(jk_x) \cdot$$

$$\cdot e^{-jk_x i\Delta x} = U_1(jk_x) \cdot \sum_{i=0}^{N-1} a_i e^{-jk_x i\Delta x}$$

$$Y(jk_x) = \mathcal{F}\{y(x)\} = \ldots = Y_1(jk_x) \cdot \sum_{i=0}^{N-1} a_i e^{-jk_x i\Delta x}$$

$$\Rightarrow \frac{U(jk_x)}{Y(jk_x)} = \frac{U_1(jk_x)}{Y_1(jk_x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U(jk_x) = \underbrace{\frac{U_1(jk_x)}{Y_1(jk_x)}}_{H^{-1}(jk_x) \text{ szűrő}} \cdot Y(jk_x)$$

$$\boxed{u(x) = \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{\mathcal{F}\{u_1(x)\}}{\mathcal{F}\{y_1(x)\}} \mathcal{F}\{y(x)\} \right\}}$$

$y_1(x)$ - mérhető

$u_1(x)$ - megválasztható

ANALÍZIS A KOMPLEX FREKVENCIA-TARTOMÁNYBAN

Laplace (1785) Heaviside (1880-1887)

1.) Alapgondolat tfh: $x(t)$ nem absz. int.: $x(t)$ helyett $x(t) \cdot e^{-\sigma t} \cdot \varepsilon(t)$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$ és „elég nagy"

$x(t)$ exp. korlátos, ha $\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t) |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$, $\exists \sigma$

$\mathcal{F}\{x(t)\}$ helyett $\mathcal{F}\{\varepsilon(t) \cdot x(t) \cdot e^{-\sigma t}\} =$

$$= \int_0^\infty x(t)\, e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t}\, dt = \int_0^\infty x(t)\, e^{-(\sigma + j\omega)t}\, dt$$

2.) Def legyen $\boxed{s = \sigma + j\omega}$ komplex frekvencia

$$\boxed{\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) \triangleq \int_0^\infty x(t) \cdot e^{-st}\, dt}$$

3.) Példák

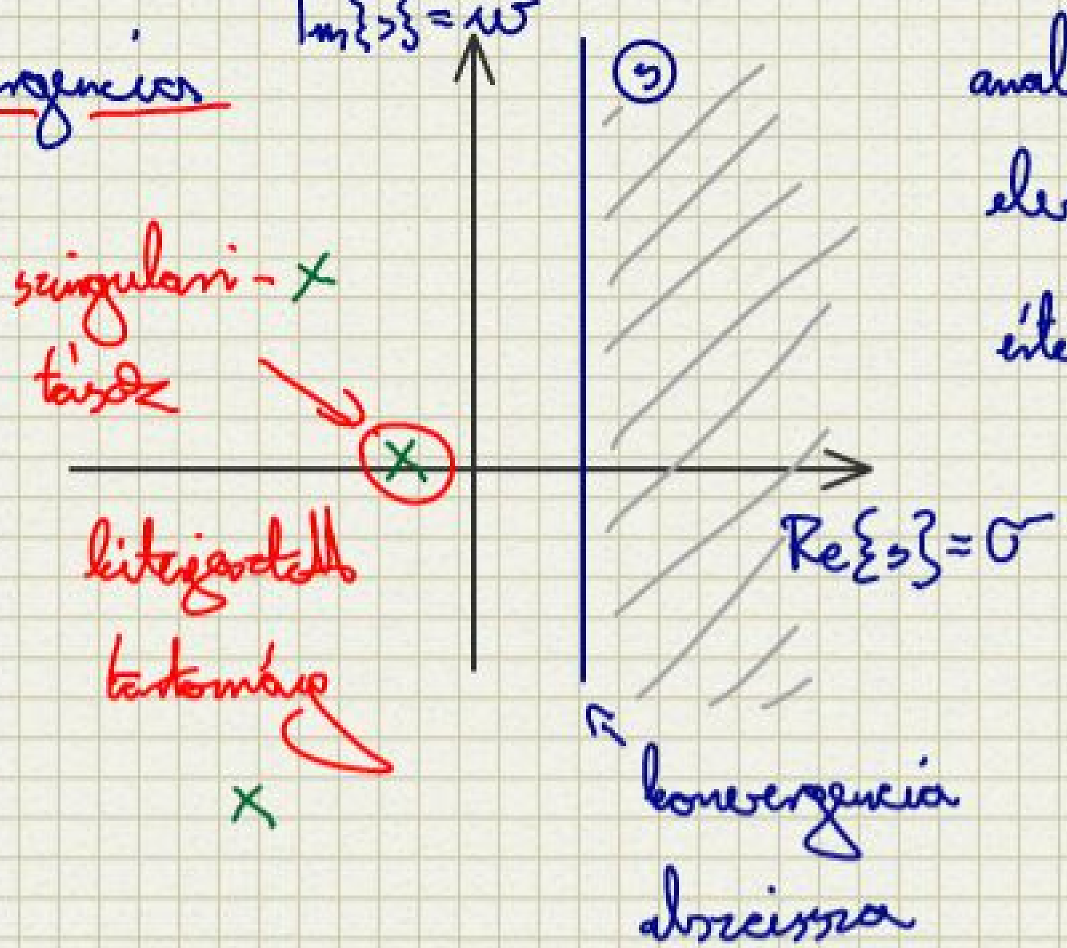
a.) $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{-0}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-st}\, dt = 1$

b.) $\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \int_{-0}^{\infty} 1 \cdot e^{-st}\, dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty = 0 - \frac{1}{-s} = \underline{\underline{\frac{1}{s}}}$

c.) $\mathcal{L}\{\varepsilon(t) \cdot e^{-\alpha t}\} = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \cdot e^{-st}\, dt = \left[\frac{e^{-(s+\alpha)t}}{-(s+\alpha)}\right]_0^\infty =$

$= \underline{\underline{\frac{1}{s+\alpha}}}$

4.) Konvergencia



analitikus kiterjesztés elve: $X(s)$ formálisan értelmezhető $\forall\, s$-re kivéve a szingularitásokat.

5. Inverz transzformáció

$$\mathcal{F}\{\varepsilon(t)\cdot x(t)e^{-(\sigma+\cancel{j\omega})t}\} = X(\sigma+j\omega) = X(s)$$

$$\varepsilon(t)\cdot e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma+j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$\varepsilon(t)\cdot x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma+j\omega)\, e^{(\sigma+j\omega)t}\, d\omega$$

$$\sigma + j\omega = s \longrightarrow d\omega = \frac{1}{j}\,ds$$

Riemann-Mellin

$$\varepsilon(t)\cdot x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)\, e^{st}\, ds$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \begin{cases} x(t), & t \ge 0 \\ 0 \end{cases}$$

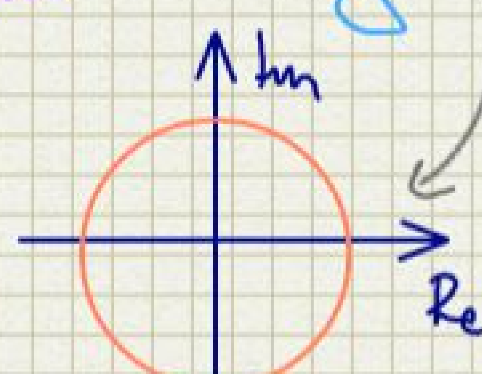
$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{x(t)\}\} = \varepsilon(t)\,x(t) \rightarrow$$ a negatív részt levágja

negatív

a.) Értelmezés:

Fourier: $$dx = \underbrace{\frac{1}{2\pi} X(j\omega)\,d\omega}_{\text{komplex amplitúdó}} \; \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{általánosított szinuszjel}}$$

≈ felbontás szinuszra



Laplace: $$dx = \frac{1}{2\pi j} X(s)\cdot ds \; \underbrace{e^{(\sigma + j\omega)t}}_{\text{exponenciális · szinusz}}$$

≈ felbontás csillapított szinuszra

b.) Átszámítás

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \text{, ha}$$

$x(t)$ abszolút int.-ható

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-0}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$\boxed{X(s) = X(j\omega)\Big|_{j\omega \leftarrow s}}$$ ha $x(t)$ belépő és abszolút int.-ható.

ellenpélda: $x(t) = \varepsilon(t)$

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{F}\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

6.) tételek:

a) $\mathcal{L}$ és $\mathcal{L}^{-1}$ lineáris

b.) Csillapítási tényező

$$\boxed{\mathcal{L}\{x(t)\, e^{-\alpha t}\} = X(s+\alpha)}$$

alk. $\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\} = \mathcal{L}\{\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}\} =$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+j\omega_0} = \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

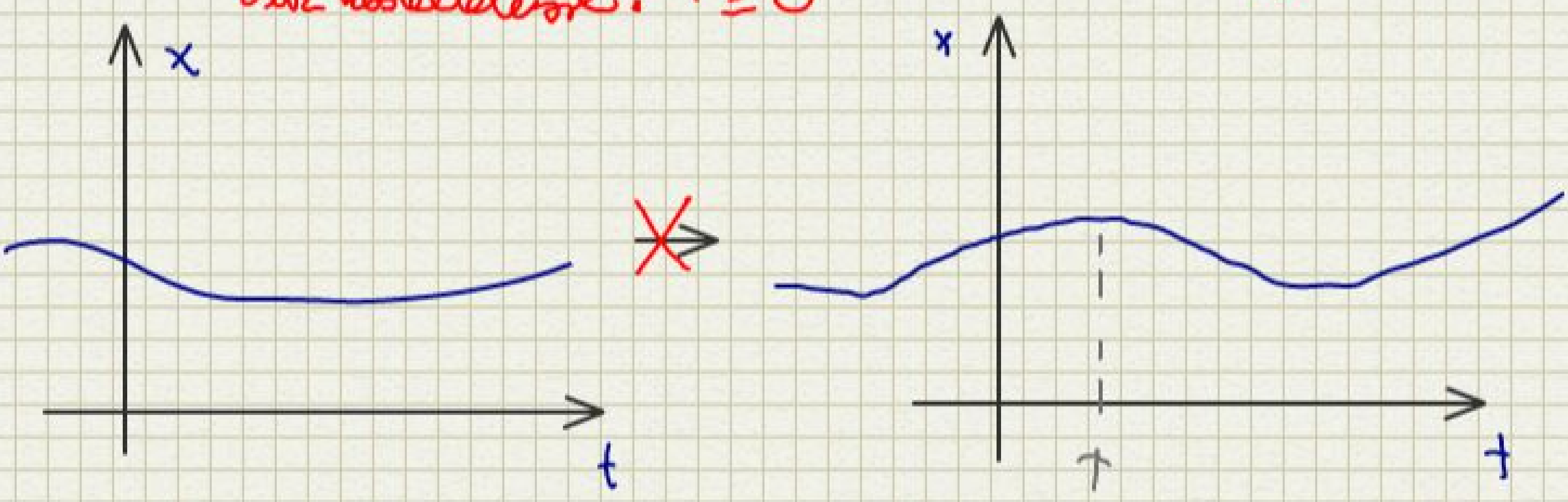
$$\mathcal{L}\{\sin(\omega_0 t)\} = \ldots = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

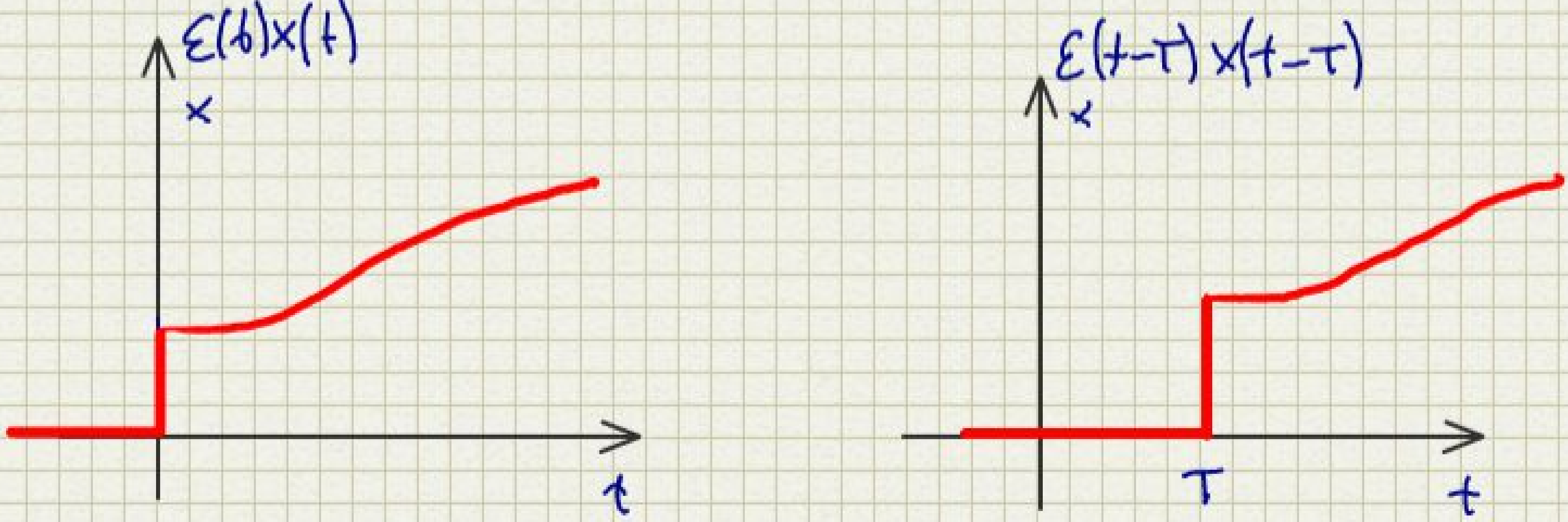
c.) Eltolási tétel

$$\boxed{\mathcal{L}\{\varepsilon(t-T)\,x(t-T)\} = X(s)\,e^{-sT}}$$

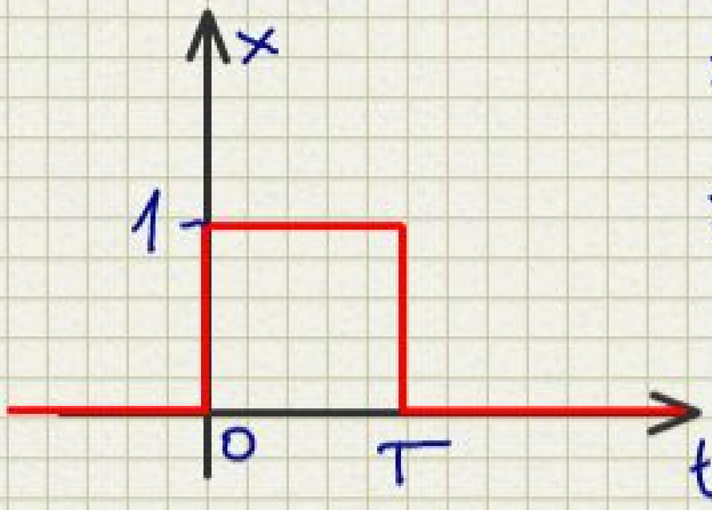
késleltetett belépésű fgv. transzformáltja

csak késleltetésre! $T \geq 0$





példa:



$x(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)$

$X(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-sT}=\frac{1-e^{-sT}}{s}$

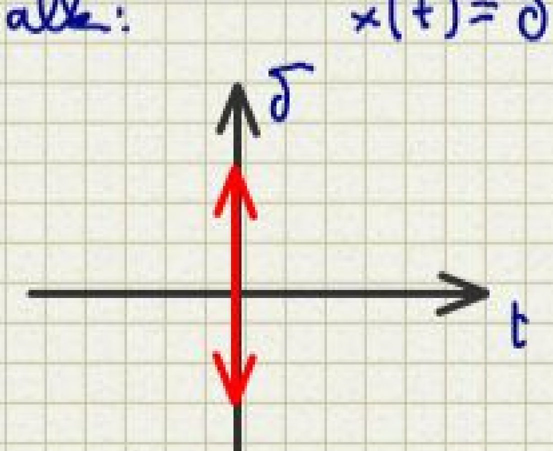
d.) Deriválási tétel:

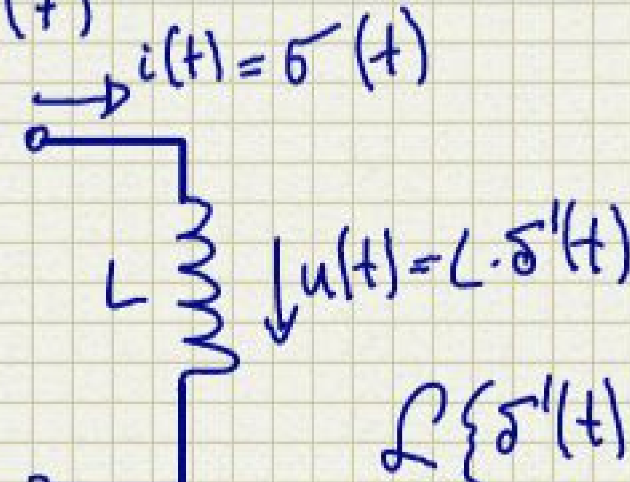
$$\boxed{\mathcal{L}\{x'(t)\}=sX(s)-x(t=-0)}$$

↳ kezdeti érték

biz: $$\int_{-0}^{\infty} x'(t)\,e^{-st}\,dt=\underbrace{\left[x(t)e^{-st}\right]_{-0}^{\infty}}_{\substack{\text{felső határ}\\ \sigma\text{ miatt } 0\\ \text{alsó határ: } x(-0)}}-\underbrace{\int_{-0}^{\infty}x(t)\cdot(-s)\cdot e^{-st}\,dt}_{s\underbrace{\int_{0}^{\infty}x(t)e^{-st}\,dt}_{X(s)}}$$

alk.*: $x(t)=\delta'(t)$



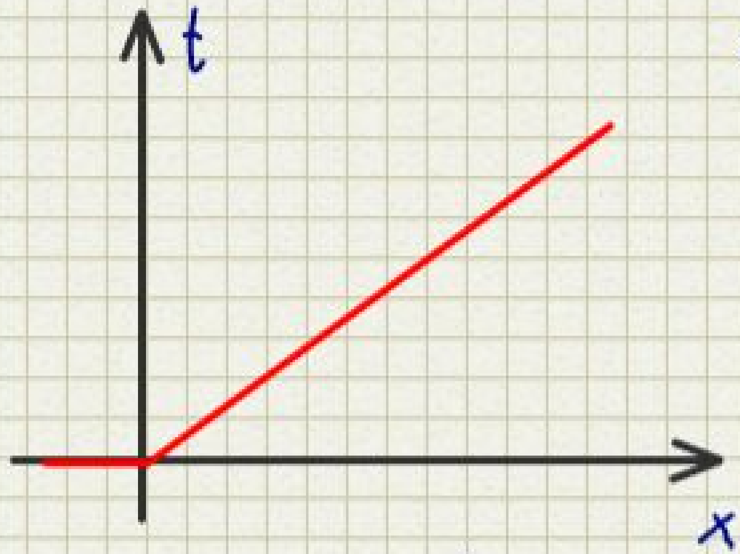


$$\mathcal{L}\{\delta'(t)\}=s\cdot\mathcal{L}\{\delta(t)\}=\underline{\underline{s}}$$

e.) Integrálási tétel:

$$\mathcal{L}\left\{\int_{-0}^{t} x(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}\cdot X(s)$$

alk.:



$x(t) = \varepsilon(t)\cdot t$

egység-sebességugrás

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\cdot t\} = \mathcal{L}\left\{\int_{0}^{t} \varepsilon(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \underline{\underline{\frac{1}{s^2}}}$$

f.) Kezdeti- és végérték tétel

- Ha $|x(+0)| < \infty$, $x(+0) = \lim\limits_{s\to\infty} s\,X(s)$
- Ha $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ létezik és véges, $x(+\infty) =$

$= \lim\limits_{s\to 0} s\cdot X(s)$

ellenőrzésre

g.) Konvolúciós tétel: $f(t)$, $g(t)$ belépő

$$\mathcal{L}\{f*g\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-0}^{t} f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau\right\} = F(s)\cdot G(s)$$

II. A TRANSZFORMÁCIÓ MEGFORDÍTÁSA:

1.) Bevez: $x(t) = 3\delta(t) + \varepsilon(t)\left[5e^{-2t} + 7e^{-4t}\right] \xRightarrow{\text{Laplace}}$

$$X(s) = 3 + \frac{5}{s+2} + \frac{7}{s+4} = \frac{3(s+2)(s+4) + 5(s+4) + 7(s+2)}{(s+2)(s+4)} =$$

$$= \frac{3s^2+30s+58}{s^2+6s+8}$$ racionális törtfgv s-ben.

az előbbit visszafelé fogjuk elvégezni.

kulcs: részlettörtre bontás.

2.) A részlettörtre bontás módszerei:

példa:

$$X(s) = \frac{1.5s^2+6s+6}{s^2+5s+4} \rightsquigarrow s^2+5s+4=0$$

$(s+1)(s+4) = s^2+5s+4$

$s_1 = -1 \qquad s_2 = -4$

$$X(s) = A + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+4}$$

a.) „Matek"

$$X(s) = \frac{A(s+1)(s+4) + B(s+4) + C(s+1)}{(s+1)(s+4)}$$

$$A(s+1)(s+4)+B(s+4)+C(s+1)=1{,}5s^2+6s+6$$

$$\left.\begin{aligned} s^2&: A=1{,}5 \\ s&: 5A+B+C=6 \\ 1&: 4A+4B+C=6 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} A&=1{,}5 \\ B&=0{,}5 \\ C&=-2 \end{aligned}$$

$$x(t)=1{,}5\,\delta(t)+\varepsilon(t)\cdot 0{,}5\,e^{-1t}+\varepsilon(t)(-2)e^{-4t}$$

b.) Matlab / Octave

```
>> [r,p,k] = residue([1.5 6 6],[1 5 4])

r = [-2 0.5]

p = [-4 -1]

k = 1.5
```

c.) „Letakarásos" módszer

$$\lim_{s\to\infty} X(s) = \lim_{s\to\infty} A + \lim_{s\to\infty}\frac{B}{s+1} + \lim_{s\to\infty}\frac{C}{s+4} = A+0+0 = A$$

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1{,}5s^2+6s+6}{s^2+5s+4} = \frac{1{,}5}{1} = 1{,}5$$

$$\lim_{s\to -1}(s+1)X(s) = \lim_{s\to -1}(s+1)A + \lim_{s\to -1}\cancel{(s+1)}\frac{B}{\cancel{s+1}} + \lim_{s\to -1}(s+1)\frac{C}{s+4} =$$

$$= 0 + B + 0 = B$$

$$\lim_{s\to -1}(s+1)\frac{1{,}5s^2+6s+6}{(s+1)(s+4)} = \frac{1{,}5s^2+6s+6}{s+4}\Bigg|_{s=-1} = 0{,}5$$

$$C = \lim_{s\to -4}(s+4)X(s) = \frac{1{,}5s^2+6s+6}{s+1}\Bigg|_{s=-4} = -2$$

3.) A kifejtési tétel: (Heaviside)

tfh: $X(s)$ racionális törtfgv. a nevezőben 1x-es gyökökkel. P fokszáma ≥ Q fokszáma

$$X(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_n)}$$

$$X(s) = C_0 + \frac{C_1}{s-s_1} + \frac{C_2}{s-s_2} + \ldots + \frac{C_n}{s-s_n}$$

$$\boxed{C_0 = \lim_{s\to\infty} X(s)} \quad \text{és} \quad C_i = \lim_{s\to s_i}(s-s_i)X(s) =$$

$$= \frac{Q(s)}{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (s - s_k)} \Bigg|_{s = s_i}$$

$$x(t) = C_0 \delta(t) + \varepsilon(t) \left[C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + \ldots + C_n e^{s_n t} \right]$$

4.) Spec. esetek:

- s_i többszörös
- $s_i = s_{i+1}^*$ komplex konjugált pár.
- exponenciális szorzó esete

$$\text{pl: } F(s) = X(s) e^{-sT}$$

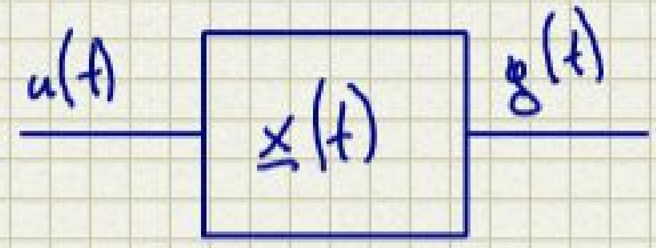
$X(s)$ rac. törtfggv.

$\longrightarrow$ eltolási tényező.

II. KIRCHHOFF-TÍPUSÚ HÁLÓZATOK ANALÍZISE S-TARTOMÁNYBAN

1.) Az állapotváltozós leírás transzformációja

$$\begin{cases} \underline{x}'(t) = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}(t) + \underline{b}\,u(t) \\ y(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t) + D\cdot u(t) \end{cases}$$



$$\xrightarrow{\mathcal{L}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} s\underline{X}(s) - \underline{x}(0) &= \underline{\underline{A}}\,\underline{X}(s) + \underline{b}\,U(s) \\ Y(s) &= \underline{c}^T \underline{X}(s) + d\,U(s) \end{aligned}}$$

ALGEBRAI EGYENLETRENDSZER

$$(s\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})\,\underline{X}(s) = \underline{b}\,U(s) + \underline{x}(0)$$

$$\underline{X}(s) = (s\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\cdot \underline{b}\,U(s) + (s\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{x}(0)$$

$$\boxed{Y(s) = \left[\underline{c}^T (s\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{b} + d\right] U(s) + \underbrace{\underline{c}^T (s\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{x}(t=0)}_{\text{belépő gerjesztés esetén nincs}}}$$

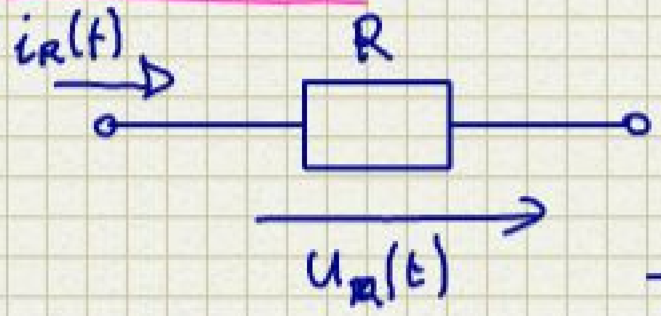
$$\varepsilon(t)\cdot y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

2.) A hálózat transzformálása

hálózat = elemek összekapcsolása

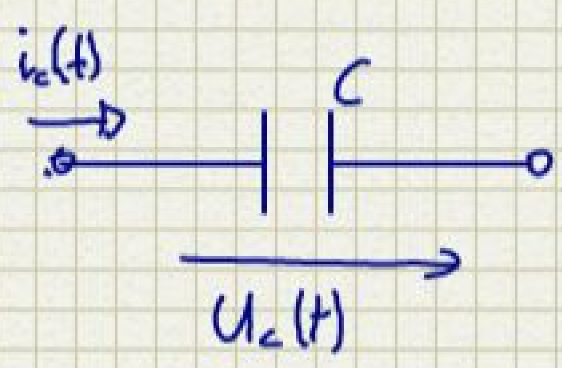
elemkarakterisztikák + kapcsolási kényszerek

a.) karakterisztikák



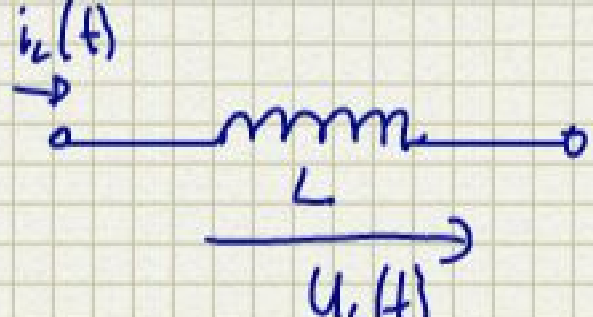
$$u_R(t) = R \cdot i_R(t) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} U_R(s) = R \cdot I_R(s)$$



$$i_C(t) = C\frac{du_C}{dt} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} I_C(s) = C\left[sU_C(s) - u_C(0)\right]$$



$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow U_L(s) = L\left[sI_L(s) - i_L(0)\right]$$

b.) bekapcsolási folyamat

$\hookrightarrow u_C(t=0)=0 \, ; \, i_L(t=0)=0$

$$U_R(s) = R \cdot I_R(s)$$

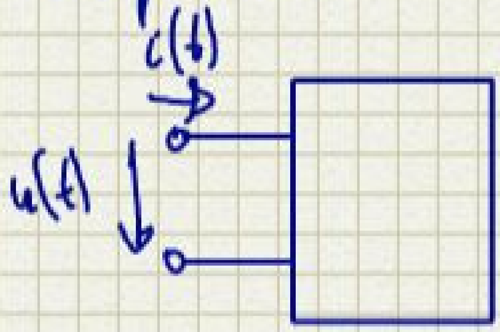
$$U_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s)$$

$$U_L(s) = s \cdot L \cdot I_L(s)$$

operátoros impedancia: $U(s) = Z(s) \cdot I(s)$, ahol

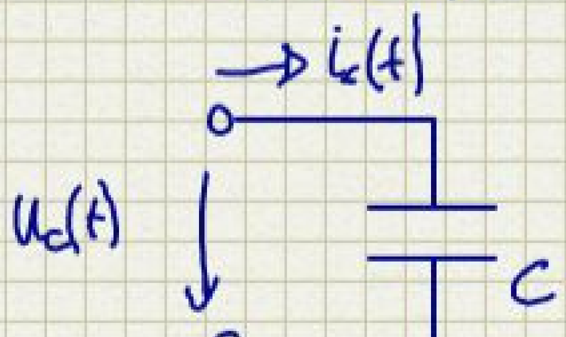
$$\boxed{Z_R(s) = R \, ; \; Z_C(s) = \frac{1}{sC} \, ; \; Z_L(s) = s \cdot L}$$

kétpólusra:

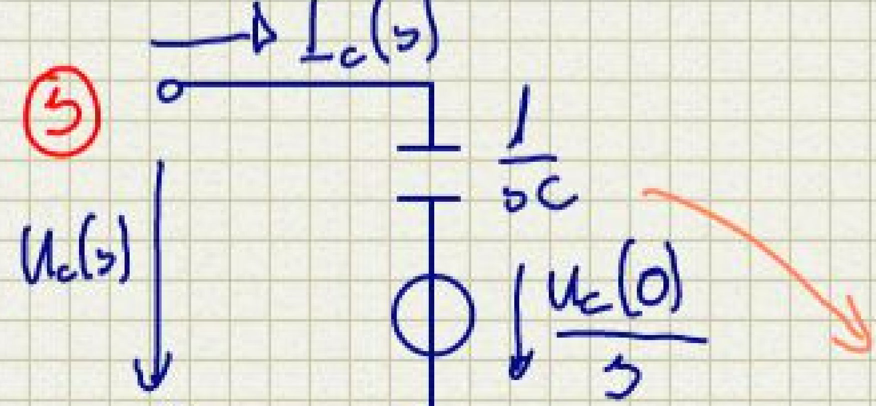


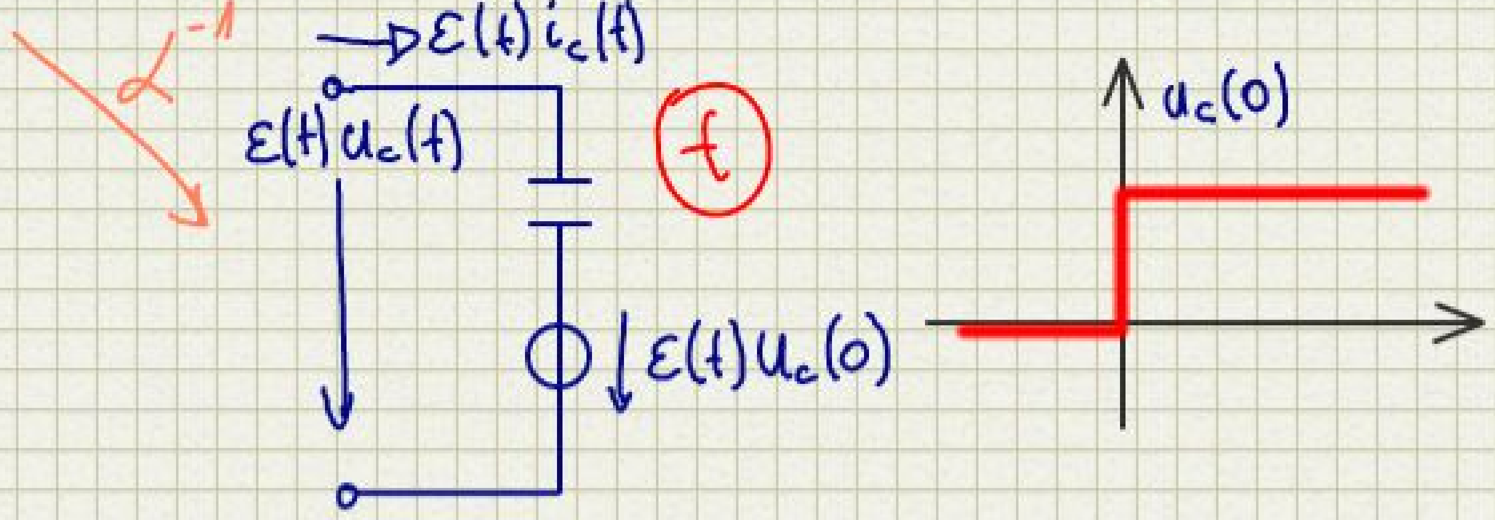
$$\boxed{Z(s) \triangleq \frac{U(s)}{I(s)}}$$

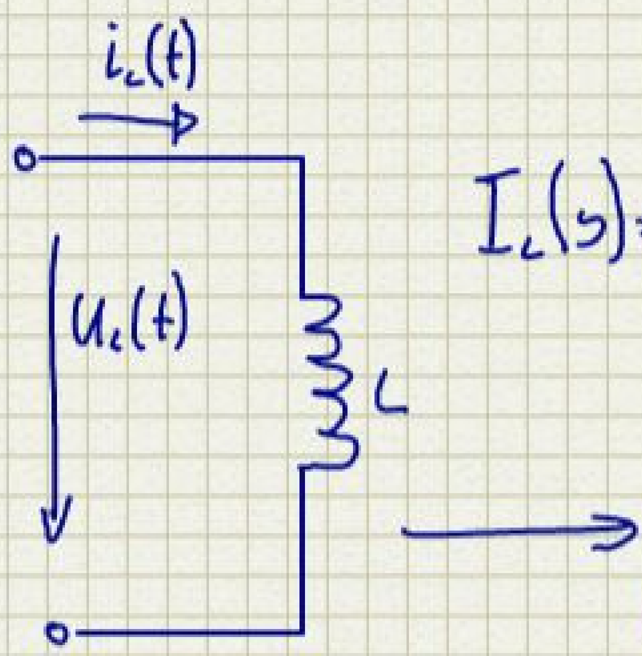
c.) Át / kikapcsolás $\longrightarrow$ helyettesítő kép



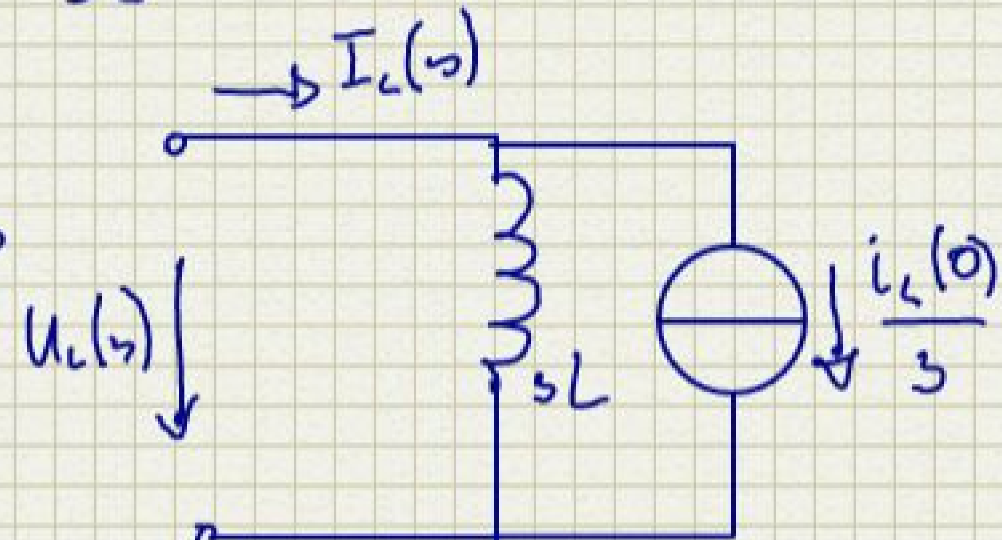
$$U_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{u_C(t=0)}{s}$$







$$I_L(s) = \frac{1}{sL} U_L(s) + \frac{i_L(t=0)}{s} \longrightarrow$$

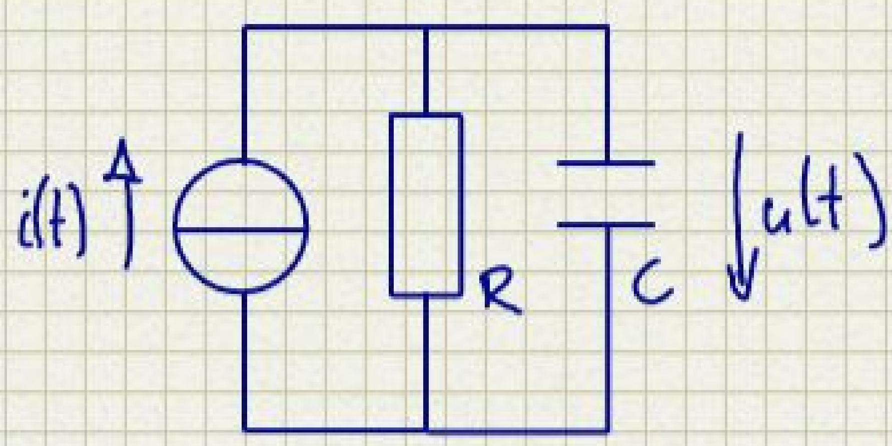


d) Kirchhoff-egyenlet

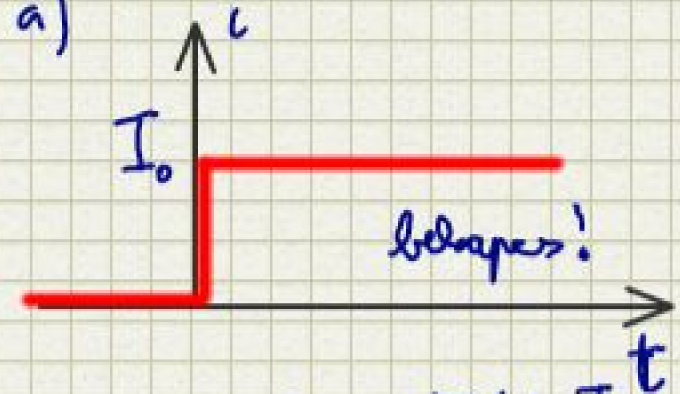
I. csomópontra / vágatra: $\sum_k i_k(t) = 0 \longrightarrow \sum_k I_k(s) = 0$

II. hurokra: $\sum_k u_k(t) = 0 \longrightarrow \sum_k U_k(s) = 0$

3.) Példa



a)

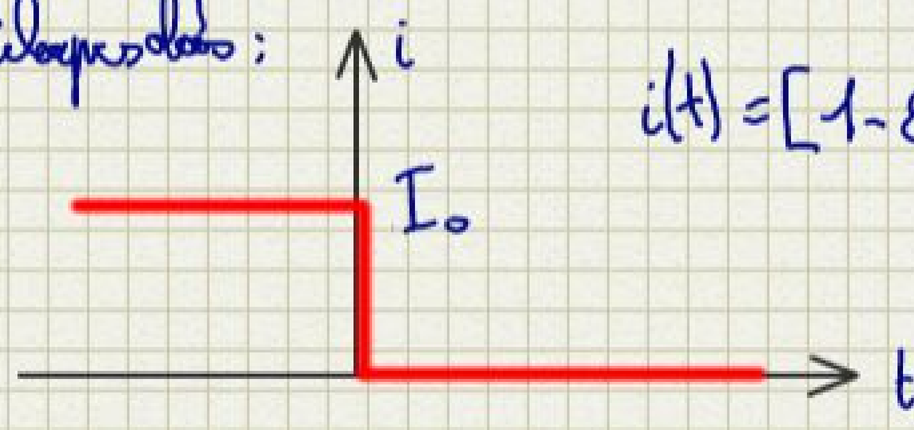


$$i(t) = \varepsilon(t)\cdot I_0 \to I(s) = \frac{I_0}{s}$$

$$U(s) = \left(R \times \frac{1}{sC}\right)\cdot I(s) = \frac{I_0}{C}\,\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{RC}\right)} =$$

$$= I_0 R\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} u(t) = \varepsilon(t)\cdot I_0 R\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

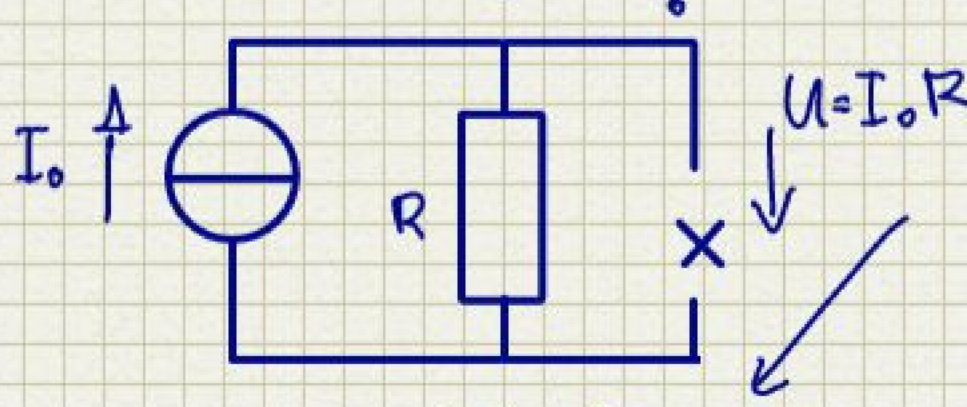
b) kikapcsolás:



$$i(t) = [1-\varepsilon(t)]\cdot I_0 = \varepsilon(-t)\, I_0$$

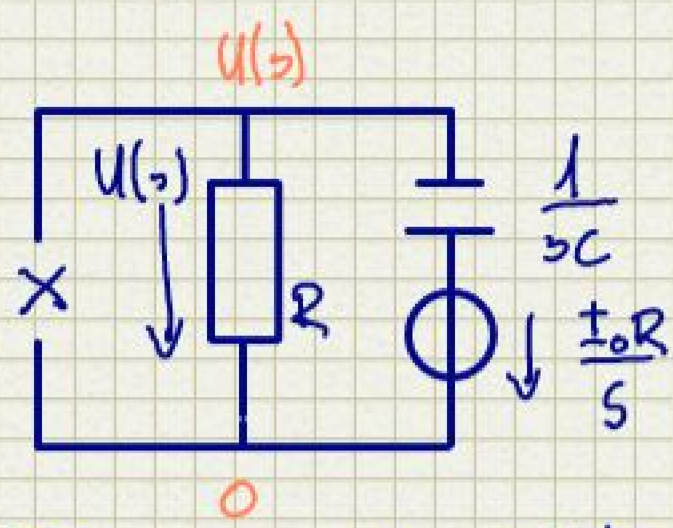
α.) $t < 0$

konst. $\Rightarrow$



$$u_c(-0) = u(-0) = I_0 R$$

β.) $(t \geq 0)$

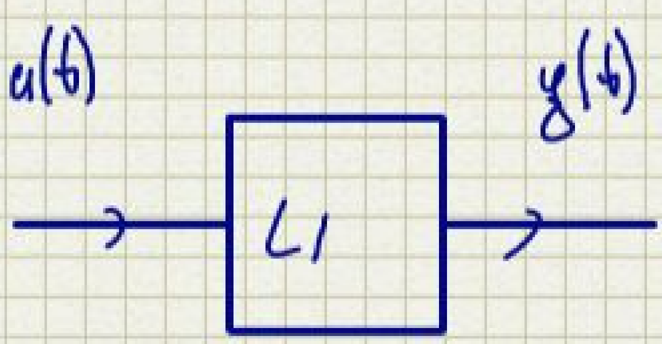


$$u(s) = \frac{I_0 R}{s+\frac{1}{RC}} \longrightarrow u(t) = \varepsilon(t) I_0 R e^{-\frac{t}{RC}}$$

γ.)

$$u(t) = \begin{cases} I_0 R, & t < 0 \\ I_0 R e^{-\frac{t}{RC}}, & t \geq 0 \end{cases}$$

IV. ÁTVITELI FÜGGVÉNY



kauzális!

$\Updownarrow$

1.) Def: impulzusválasz $h(t)$ belépő

$$\boxed{H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}}$$

2.) G-V kapcsolat: konvolúció tétel

tfh: $u(t)$ belépő

$$y(t)=\int_{-0}^{t} h(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau$$

$$\boxed{Y(s)=H(s)\cdot U(s)}$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\,\mathcal{L}\{u(t)\}\}\equiv$$

$$\equiv \mathcal{W}\{u(t)\}$$

$$\boxed{H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}}$$ (formális összefüggés)

3.) Átviteli karakterisztika

$H(j\omega)=\mathcal{F}\{h(t)\}$, ha $h(t)$ absz. int-ható

$H(s)=\mathcal{L}\{H(t)\}$, ha $h(t)$ belépő

$$\boxed{H(j\omega)=H(s)\Big|_{s=j\omega}}$$

példa: 1. 3/a

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{U(s)}{I(s)}=\frac{1/C}{s+\frac{1}{RC}}$$

gej

$$h(t)=\varepsilon(t)\cdot\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}$$

4.) Állapotegyenlet $\rightarrow H(s)$

(III/1)

$u(t)=\delta(t) \Rightarrow U(s)=1$; $\underline{x}(t=0)=\underline{0}$

$y(t)=h(t) \Rightarrow Y(s)=H(s)$

$$\boxed{H(s)=\underline{c}^T\cdot(s\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}})^{-1}\underline{b}+d}$$

(pl: Matlab: ss2tf)

5.) Pólus-Zérus reprezentáció H(s) rac. törtfgv.

$$H(s)=\frac{Q(s)}{P(s)}=\frac{b_0 s^m+b_1 s^{m-1}+\dots+b_{m-1}s+b_m}{s^n+a_1 s^{n-1}+\dots+a_{n-1}s+a_n},\quad m\leq n$$

$$H(s)=b_0\frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$

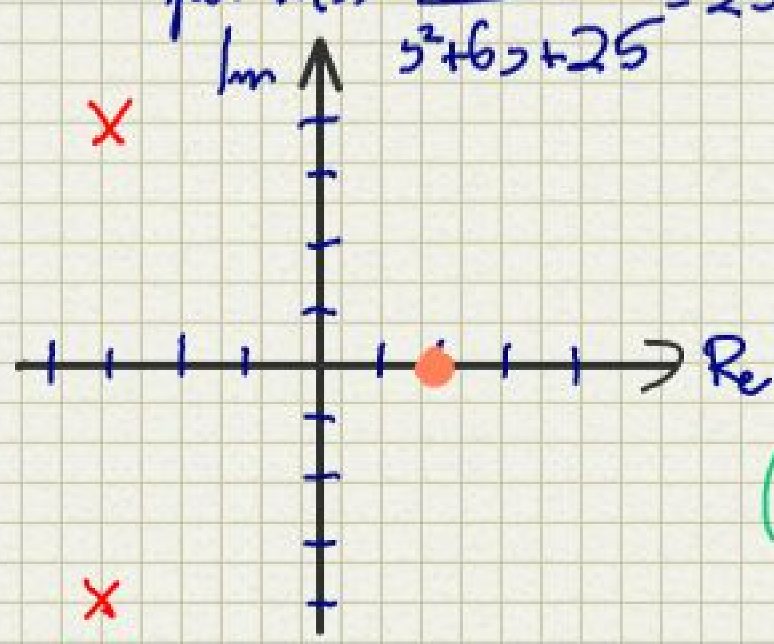
z_i, $i=1,\dots,m$ zérusok

p_i, $i=1,\dots,n$ pólusok

(szingularitások)

ábrázolás:

$$\text{pl: } H(s)=\frac{25s-50}{s^2+6s+25}=25\frac{s-2}{[s-(-3+j4)]\cdot[s-(-3-j4)]}$$



$z_1=2$

$p_{1,2}=-3\pm j4$

(ez szorozva 25-tel)

Matlab/Octave: pzmap([25 -50],[1 6 25])

XV. ÁTVITELI FÜGGVÉNY

f.) G-V Stabilitás

$$\sim \Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| < \infty$$

kauzalitás $\Longleftrightarrow$ h(t) belépő

$$\sim \Longleftrightarrow \int_{-0}^{\infty} \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} dt < \infty$$

H(s) racionális törtfgv.,

$$\rightarrow h(t) = C_0 \delta(t) + \varepsilon(t)\left[C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \ldots + C_n e^{p_n t}\right]$$

$$\sim \Longleftrightarrow \int_{0}^{\infty} |C_i e^{p_i t}| dt < \infty \quad , \forall i$$

$$p_i = \alpha_i + j\beta_i$$

$$e^{p_i t} = e^{\alpha_i t} \cdot e^{j\beta_i t}$$

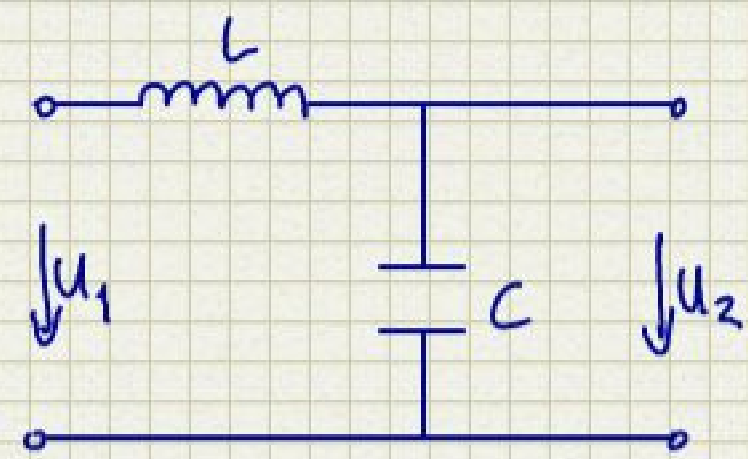
$$|e^{p_i t}| = |e^{\alpha_i t}| \cdot 1$$

$$\boxed{\text{G-V stabilis} \Longleftrightarrow \mathrm{Re}\{p_i\} < 0 \ , \ i = 1, \ldots, n}$$

$\forall$ pólus a bal félsíkra essen.

stabilitás határhelyzete: $\exists p_i$, $Re\{p_i\}=0$ és p_i egyszeres.

pl.:



$$H(s) = \frac{1/sC}{sL + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{s^2LC+1} = \frac{1/LC}{s^2 + \frac{1}{LC}} = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} = \frac{\omega_0^2}{(s+j\omega_0)(s-j\omega_0)}$$

pólus-zérus ábra:

8.) Redukált átviteli függvény

pl.:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= -5x_1 - 6x_2 + u \\ x_2' &= x_1 \\ y &= -8x_1 - 16x_2 + 2u \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{aligned} sX_1 &= -5X_1 - 6X_2 + U \\ sX_2 &= X_1 \\ Y &= -8X - 16X_2 + 2U = (*) \end{aligned}$$

$$s^2X_2 = -5sX_2 - 6X_2 + U$$

$$X_2 = \frac{U}{s^2+5s+6}$$

$$(*) = (-8s-16)X_2 + 2U = \frac{(-8s-16)U}{s^2+5s+6} + 2U$$

$$H(s) = \frac{Y}{U} = \frac{-8s-16}{s^2+5s+6} + 2 = \frac{2s^2+2s-4}{s^2+5s+6} = 2\frac{\cancel{(s+2)}(s-1)}{(s+3)\cancel{(s+2)}}$$

$$H'(s) = \frac{2s-2}{s+3}$$

sajátérték: $\det(\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}) = 0$

$$\lambda_1 = -3 \; ; \; \lambda_2 = -2$$

pólusok: $p_1 = -3$

$$\boxed{\begin{array}{l} \{p_i \mid i=1,\dots,n\} \subseteq \{\lambda_j \mid j=1,\dots,N\} \\ \quad n \leq N \\ \text{G-V stab.} \Leftarrow \text{aszimptotikusan stab.} \end{array}}$$

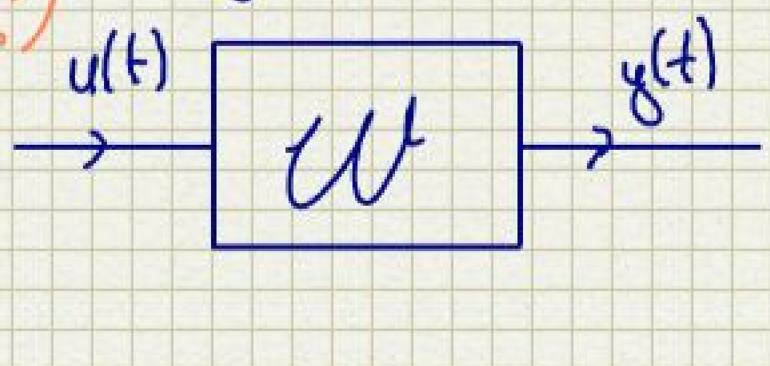
$$H'(s) = \frac{2s-2}{s+3}$$

• Rendszerjellemző függvények

- G-V kapcs
- rendszertulajdonságok

(I.) Rendszertul. (ism)

$$y(t) = \mathcal{W}\{u(t)\}$$



1.) Linearitás

$$W\{c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)\} = c_1 W\{u_1(t)\} + c_2 W\{u_2(t)\}$$

2.) Időinvariancia

$$y(t) = W\{u(t)\} \Rightarrow W\{u(t-T)\} = y(t-T),\ \forall T$$

$$W\{u(t-T)\} = W\{u(t)\}\Big|_{t \leftarrow (t-T)}$$

3.) Kauzalitás

$$y(t_0) = W\{\varepsilon(t_0 - t)\cdot u(t)\},\ \forall t_0$$

lineáris $\Rightarrow$ $u(t) = \varepsilon(t)\, u(t)$

esetén $y(t) = \varepsilon(t)\, y(t)$

4.) G-V stabilitás

$$|u(t)| < \infty,\ t \in \mathbb{R} \Rightarrow |y(t)| < \infty,\ t \in \mathbb{R}$$

II. A három „h"

① Impulzusválasz - $h(t)$

értelmezés; lineáris, invariáns (L I)

G-V kapcs: $y(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau$

kauzalitás $\Leftrightarrow$ $h(t)$ belépő

G-V stab $\Leftrightarrow$ $h(t)$ absz. int-ható

② Átviteli karakterisztika - $H(j\omega)$

értelmezés: LI + GV stab.

⊙ G-V kapcs: $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega) \cdot \mathcal{F}\{u(t)\}\}$ ha

$u(t)$ absz. int-ható.

kauzalitás → belépő-jel spektruma

③ Átviteli függvény - $H(s)$

értelmezés: LI + kauzalitás

G-V kapcs: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\,\mathcal{L}\{u(t)\}\}$, ha $u(t)$ belépő

G-V stab $\Leftrightarrow \mathrm{Re}\{p_i\} < 0$, $i = 1, \ldots, n$

④ Kapcsolatok

$$\begin{tikzcd}
 & h(t) \arrow[dl, "\mathcal{F}"'] \arrow[dr, "\mathcal{L}"] & \\
H(j\omega) \arrow[rr, leftrightarrow, "s=j\omega"'] & & H(s)
\end{tikzcd}$$

5.) Példák

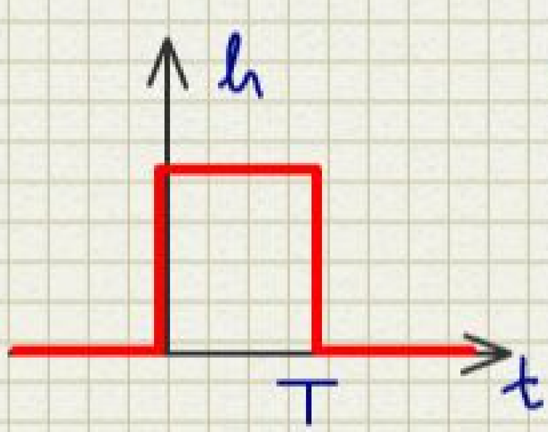
a) Ideális aluláteresztő

$$H(j\omega) = \varepsilon(\omega + \Omega) - \varepsilon(\omega - \Omega)$$

$$h(t) = \frac{\Omega}{\pi} \cdot \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t}$$

↳ nem belépő ⇒ nem kauzális

b.) Nulladrendű tartó



$$h(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - T)$$

$$H(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

↳ nem rac törtfgv!

NEM építhető fel invariáns elemekből!

III. Speciális tulajdonságú rendszerek

1.) Mindentáteresztő (MÁ)

$$\boxed{\text{DEF: } K(\omega) = K_0 \text{ (konst.)}}$$

(G-U stab.)

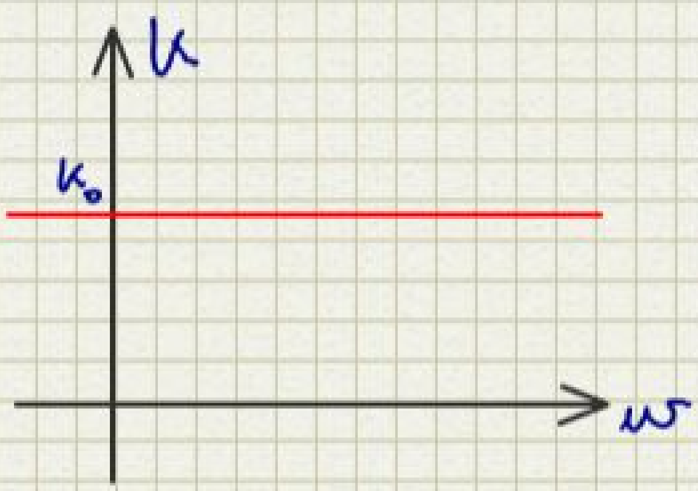
áll.: $$H(s) = \pm K_0 \frac{(s+p_1^*)(s+p_2^*)\dots(s+p_n^*)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$

mert: $(j\omega - p_i)^* = -j\omega - p_i^* = -(j\omega + p_i^*)$

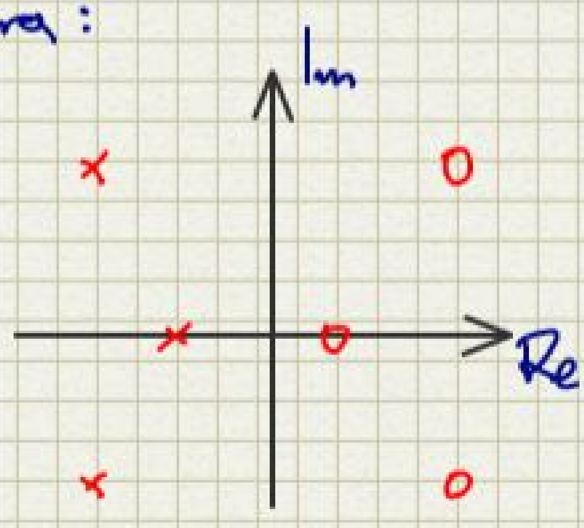
$$\frac{-(j\omega + p_i^*)}{(j\omega - p_i)^*} = 1 \implies \left| \frac{j\omega + p_i^*}{j\omega - p_i^*} \right| = 1$$

$$K(\omega) = |H(j\omega)| = |\pm K_0| \cdot \left| \frac{j\omega + p_1^*}{j\omega - p_1} \right| \cdot \left| \frac{j\omega + p_2^*}{j\omega - p_2} \right| \cdots \left| \frac{j\omega + p_m^*}{j\omega - p_m} \right| = K_0$$

mindentáteresztő rendszer (minden frekvenciát erősít)



P-Z ábra:



② Minimálfázisú (MF)

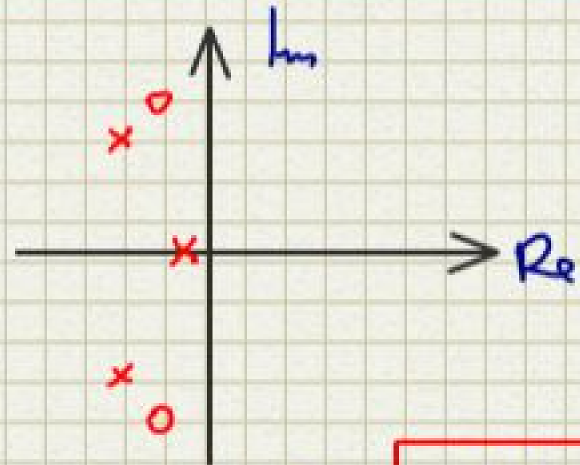
DEF: $\boxed{\text{Ha } K(\omega) = K_{MF}(\omega)\text{, akkor } \tau(\omega) \geq \tau_{MF}(\omega)}$

$$\tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$$

kib.: $H(s) = \lambda \dfrac{(s-z_1)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)\ldots(s-p_n)}$

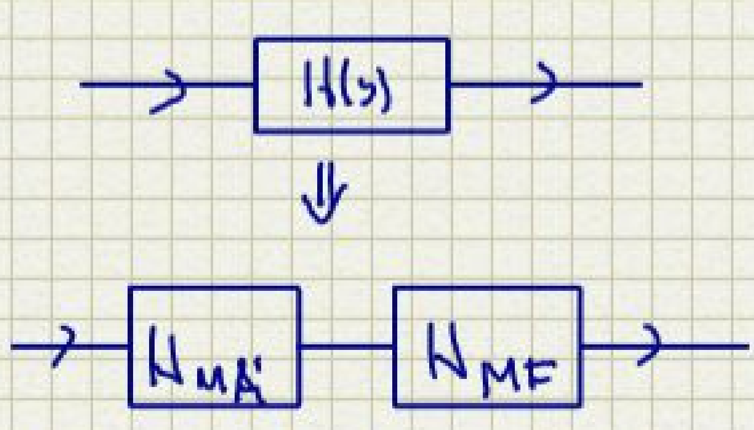
$Re\{p_i\} < 0$ (G-V stab)

$$\boxed{Re\{z_j\} < 0\ ;\ \forall j = 1, \ldots, m}$$



③ Felbontási tétel

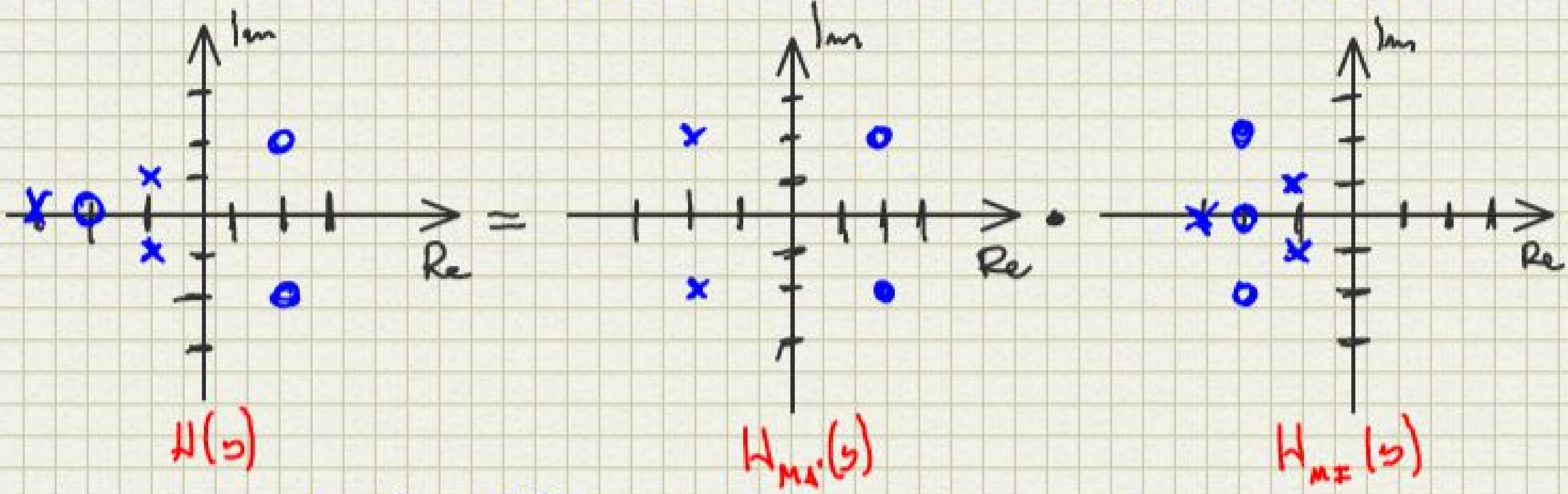
$$\boxed{H(s) = H_{MÁ}(s) \cdot H_{MF}(s)}$$



egy konstans erejéig egyértelmű.

példa:

$$H(s)=\frac{6s^3-12s^2+96}{s^3+5s^2+8s+6}=6\cdot\frac{(s+2)[s-(2+j2)][s-(2-j2)]}{(s+3)[s-(-1+j)][s-(-1-j)]}$$



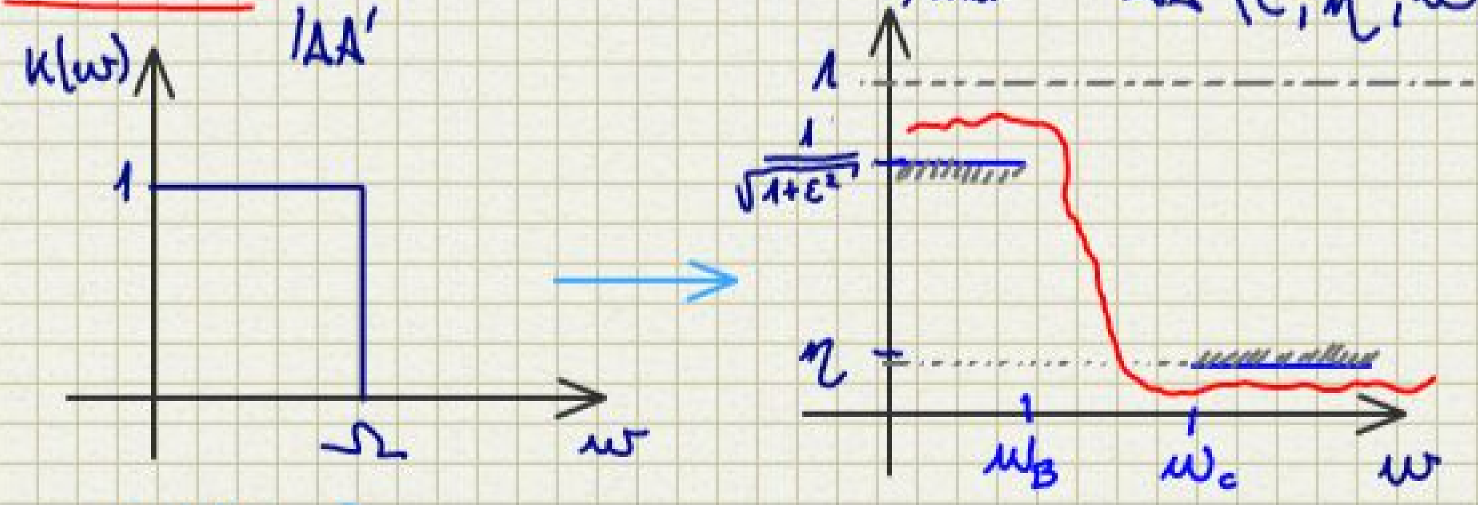
$$H_{MA}(s)=\frac{[s-(2+j2)][s-(2-j2)]}{[s-(-2+j2)][s-(-2-j2)]}\cdot 2=\frac{2s^2-8s+16}{s^2+4s+8}$$

$$H_{MI}(s)=\frac{(s+2)[s-(-2+j2)][s-(-2-j2)]}{(s+3)[s-(-1+j)][s-(-1-j)]}=\frac{3s^3+18s^2+48s+48}{s^3+5s^2+8s+6}$$

IV. SZŰRŐTERVEZÉS* (illusztráció, kitekintés)

1.) Bevezetés

$\Delta A'(\varepsilon, \eta, \omega_e, \omega_c)$



- stabilitás } megbízhatóság
- kauzalitás } megbízhatóság
- egyszerű számítás
- egyszerű kivitelezés

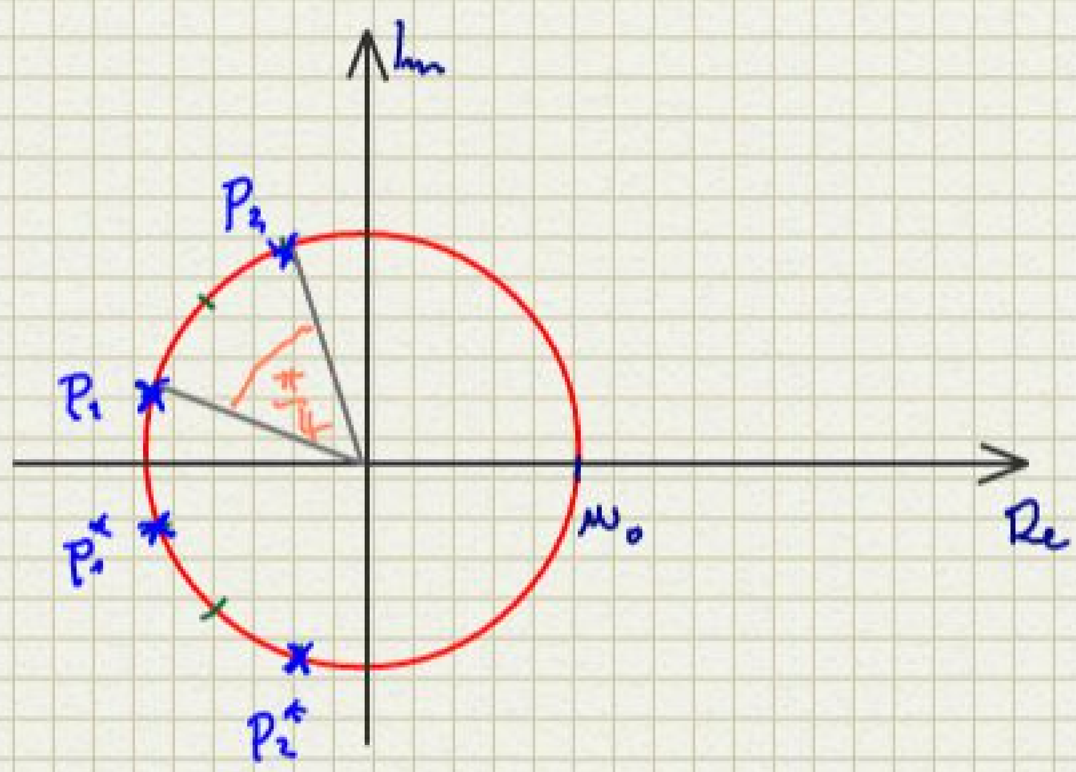
2.) Maximálisan lapos közelítés (Butterworth, 1930)

DEF: n-ed rendű „maxlap" szűrő:

a) n páros: $n = 2r$

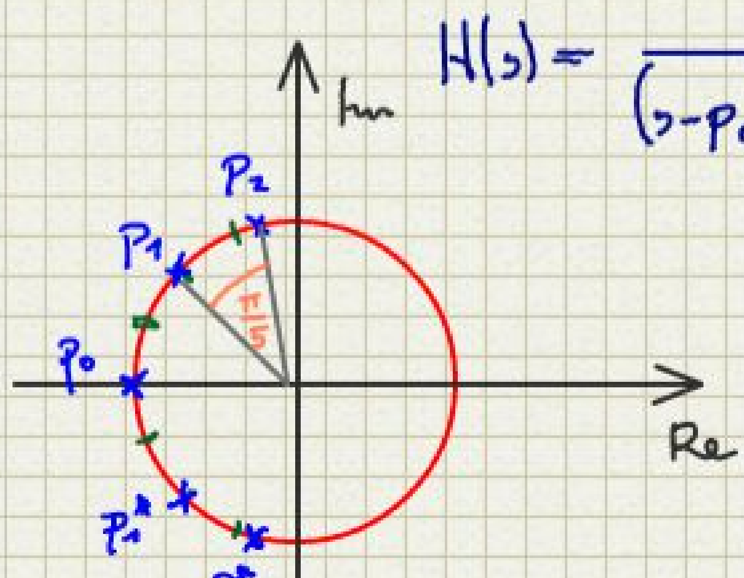
$$H(s) = \frac{\omega_0^n}{(s-p_1)(s-p_1^*)\dots(s-p_r)(s-p_r^*)}$$

ahol $p_i = \omega_0 e^{j\pi\left(1-\frac{2i-1}{2n}\right)}$



b) n páratlan: $n = 2r+1$

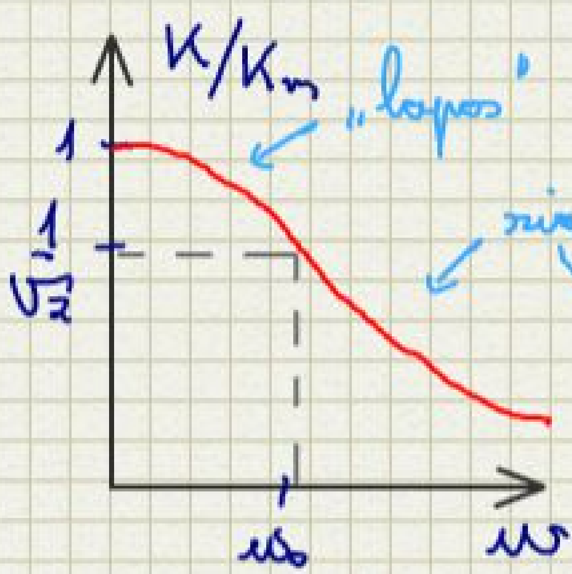
$$H(s) = \frac{\omega_0^r}{(s-p_0)(s-p_1)(s-p_1^*)\dots(s-p_r)(s-p_r^*)}$$



c.) Tulajdonságai:

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}}} \; ; \; K_m = K(0) = 1 \, , \; K(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left.\frac{d_i}{d\omega_i} K(\omega)\right|_{\omega=0} = 0 \; , \; i = 1, 2, \dots, 2_{n-1}$$



d) Méretezés: adva van: $\varepsilon, \eta, \omega_v, \omega_c$

kérdés: $\omega_0, n = ?$

feltételek: $\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_v}{\omega_0}\right)^{2n}}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ és

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^{2n}}} \leq \eta$$

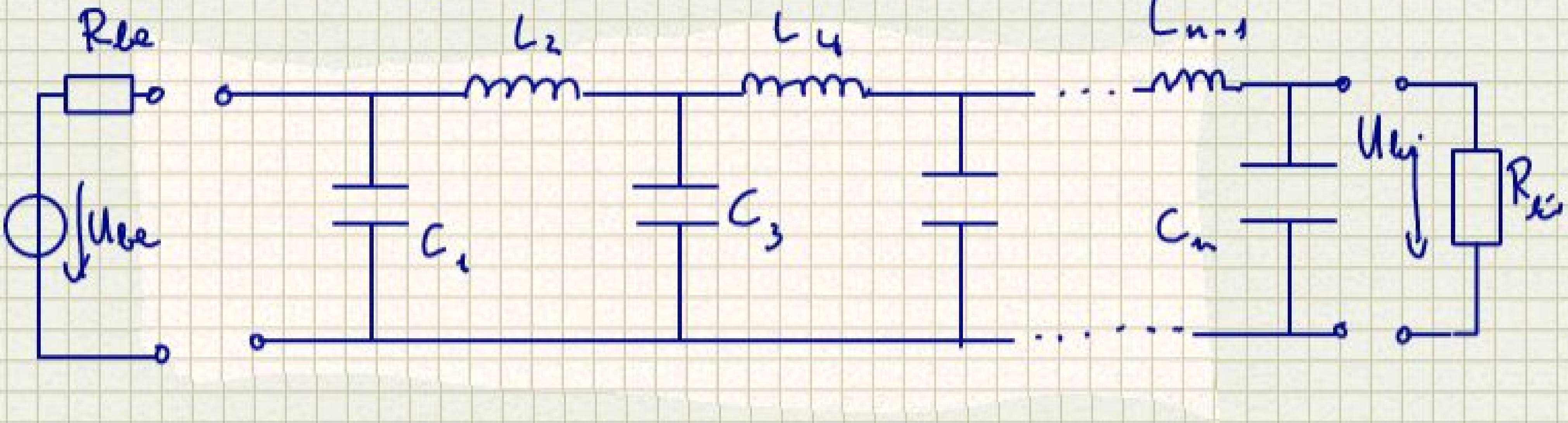
megoldás:

$$n \geq \frac{\ln \frac{\sqrt{\eta^2 - 1}}{\varepsilon}}{\ln \frac{\omega_c}{\omega_v}} \simeq \frac{-\ln(\varepsilon \cdot \eta)}{\ln \frac{\omega_c}{\omega_v}}$$

$$\omega_0 = \varepsilon^{-1/n} \cdot \omega_v$$

e.) Megvalósítás villamoshálózattal

○ Cauer-féle szintézis (realizáció)



$$C_k = \frac{2}{\omega_0} \sin\left[\frac{2k-1}{2n}\pi\right] \ (k \text{ páratlan})$$

$$L_k = \frac{2}{\omega_0} \sin\left[\frac{2k-1}{2n}\pi\right] \ (k \text{ páros})$$

koherens egységben

f) Számpélda AÁ: $\varepsilon = 0{,}6$ $\eta = 0{,}1$ $\omega_0 = 1 \frac{krad}{s}$ $\omega_s = 1{,}8 \frac{krad}{s}$

méretezés:
$$n \geq \frac{-\ln(0{,}6 \cdot 0{,}1)}{\ln \frac{1{,}8}{1}} = 4{,}79 \rightarrow \boxed{n = 5}$$

$$\omega_0 = 0{,}6^{-\frac{1}{5}} \cdot 1 \cong 1{,}11 \text{ krad/s}$$

$$p_0 = -\omega_0 = -1{,}11$$

$$p_1 = \omega_0 \cdot e^{j\frac{4}{5}\pi} = -0{,}9 + j0{,}65$$

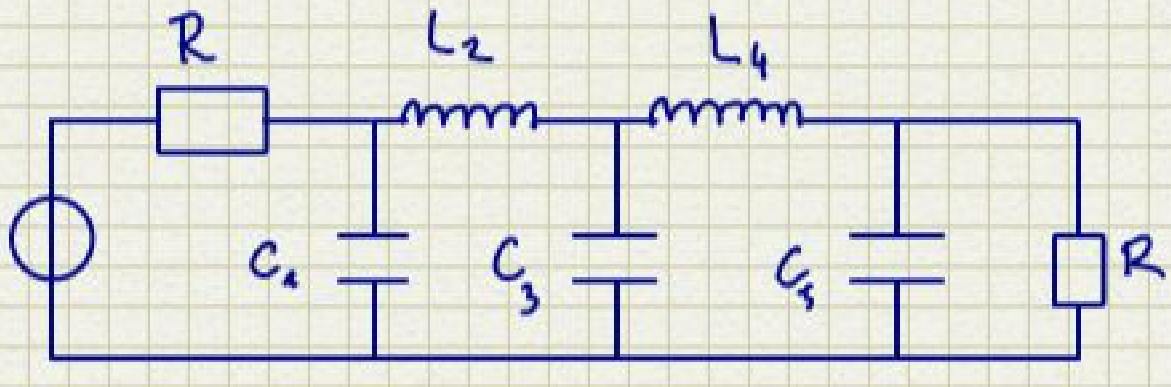
$$p_2 = \omega_0 e^{j\frac{3}{5}\pi} = -0{,}34 + j1{,}06$$

$$H(s) = \frac{\omega_0^5}{(s-p_0)(s-p_1)(s-p_1^*)(s-p_2)(s-p_2^*)} = \frac{1{,}59}{s^5+3{,}59s^4+7{,}16s^2+4{,}91s+1{,}68}$$

ell: $K(\omega_v) = 0{,}8598 > \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = 0{,}8576$ ✓

$K(\omega_c) = 0{,}0892 < \eta = 0{,}1$ ✓

- **megvalósítás:**



$R = 1\,k\Omega$

$C_1 = C_5 = 0{,}55\,\mu F$

$C_3 = 1{,}8\,\mu F$

$L_2 = L_4 = 1{,}45\,H$

$$H(s) = \frac{1{,}69}{s^5 + 3{,}59\,s^4 + 6{,}45\,s^3 + 7{,}16\,s^2 + 4{,}91\,s + 1{,}68}$$

DISZKRÉT IDEJŰ JELEK, RENDSZEREK ÉS HÁLÓZATOK VIZSGÁLATA

ALAPFOGALMAK:

I. DI jelek

1. DEF: $y = f[k]$, $y \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$

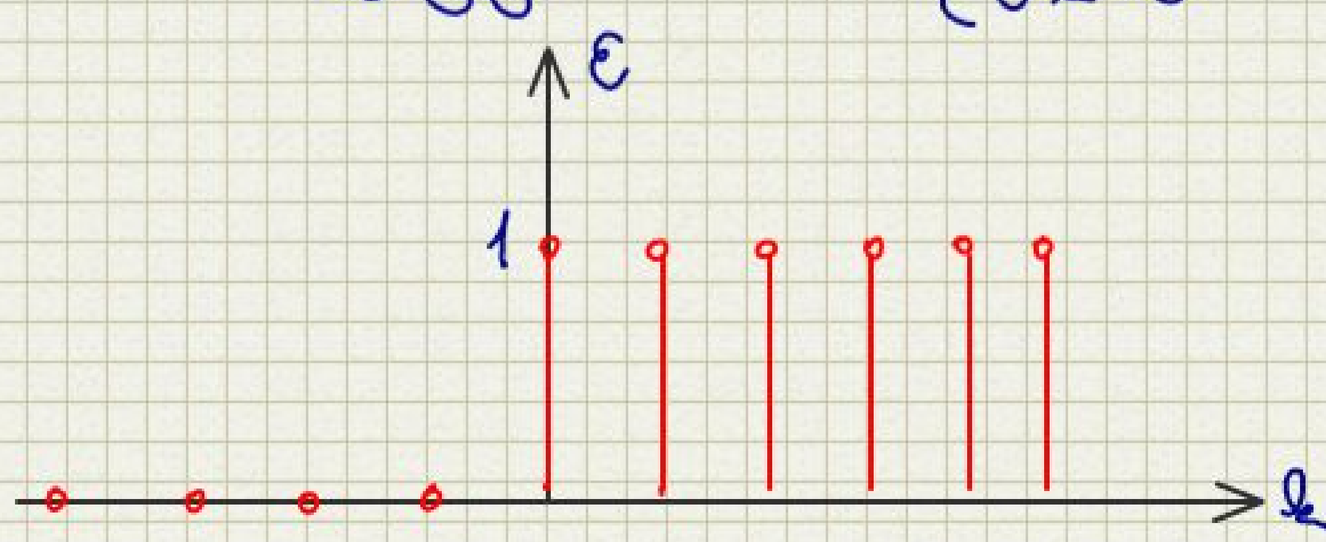
- értelmezési tartomány igen, de az értékkészlet nincsen kvantálva.

k: diszkrét idő v. ütem

2. Néhány példa

a) Egységimpulzus $\delta[k] = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k\neq 0 \end{cases}$

b) Egységugrás $\varepsilon[k] = \begin{cases} 1 & k\geq 0 \\ 0 & k<0 \end{cases}$

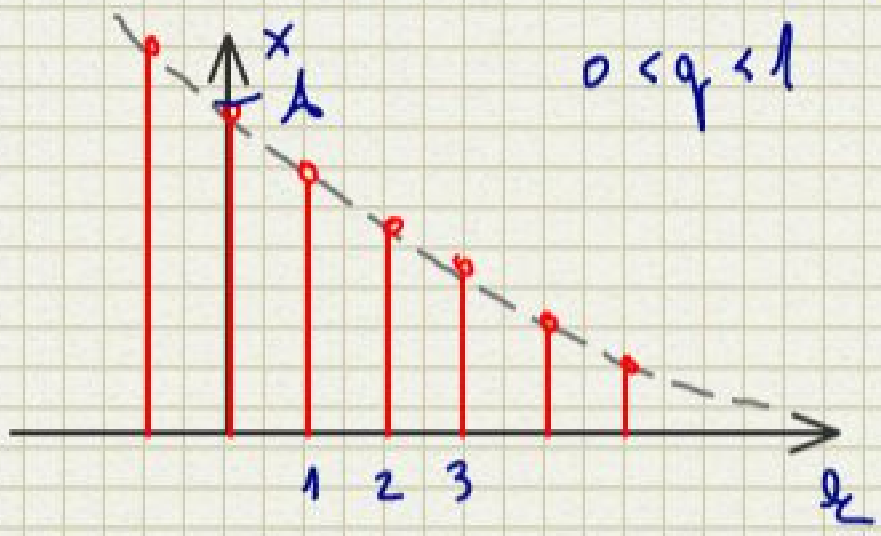


megj.: $\varepsilon[k] = \sum_{i=-\infty}^{k} \delta[i]$

c.) Exponenciális:

$$x[k] = A \cdot q^k$$

$$0 < q < 1$$



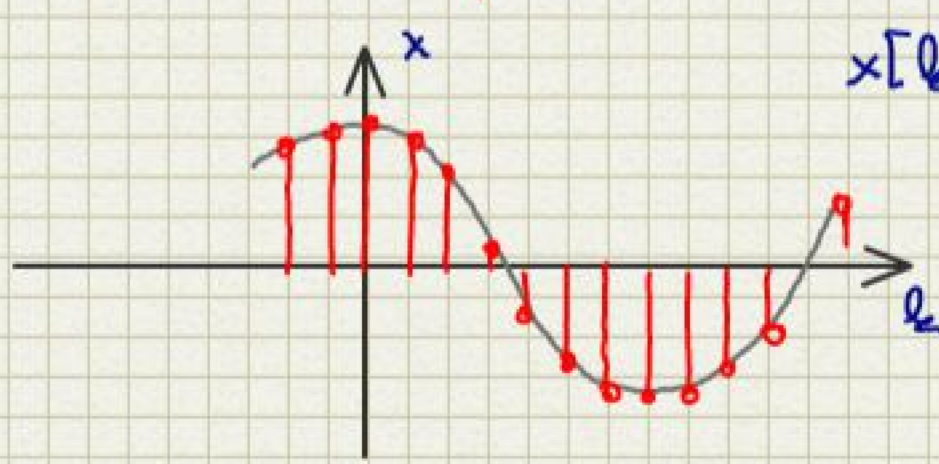
d.) „Szinuszos":

$$x[k] = A \cdot \cos(\vartheta k + \varphi)$$

amplitúdó

diszkrét körfrekvencia [rad]

kezdőfázis



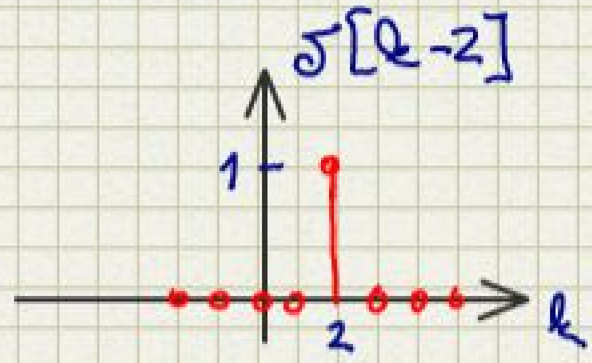
$x[k]$ periodikus $\Updownarrow$ $\frac{\vartheta}{2\pi}$ racionális

3. Műveletek DI jeleken:

a) Eltolás: $x[k] \to x[k-i] \equiv x^{(i)}[k]$

spec: $x[k+1] \equiv x^{(-1)}[k] \equiv x'[k] \equiv x^{+}[k]$

pl.

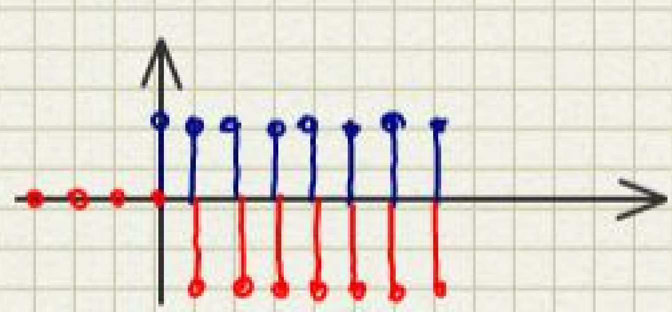


ill: $\varepsilon[k] = \delta[k] + \delta[k-1] + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \delta[k-i]$

ill: $x[k] = \ldots x[-1]\delta[k+1] + x[0]\delta[k] + x[1]\cdot\delta[k-1] + \ldots$

$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]\cdot\delta[k-i]$ ← DI konvolúció

megj: $\delta[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-1]$



b.) levágás, ablakozás

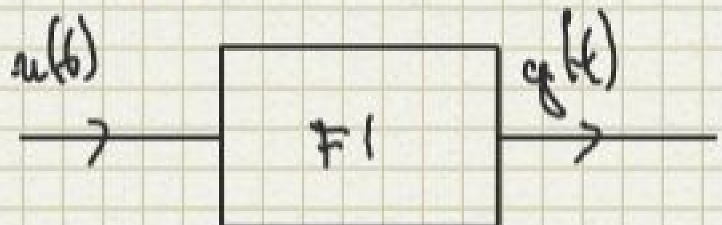
pl: $\varepsilon[k]\cdot x[k] = \begin{cases} x[k] & k \geq 0 \\ 0 & \end{cases}$

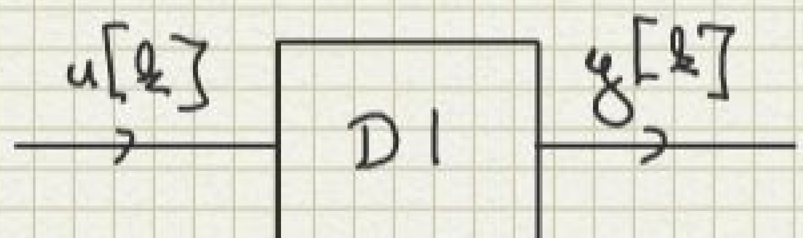
DEF: derékszögű ablak: $\varepsilon[k-a] - \varepsilon[k-(b+1)] = \begin{cases} 1, & a \leq k \leq b \\ 0 & \end{cases}$

pl: $x[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-3]\}\cdot 4{,}05^{k}$

II.) DI rendszer

1.) Def



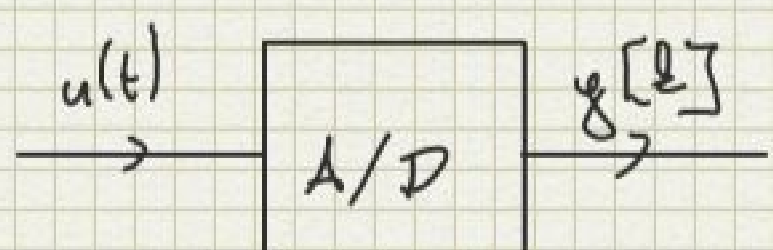


mat: $y[k] = W\{u[k]\}$

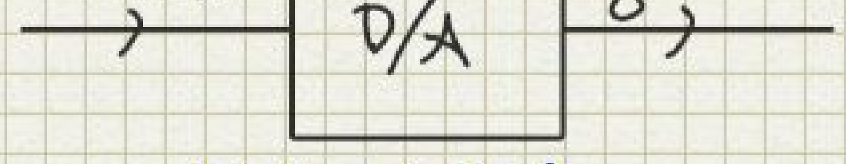
explicit

$W\{u[k], y[k]\} = 0$

implicit



mintavételezés / kvantálás



jelrekonstrukció

2.) Rendszertulajdonságok:

a.) Lineáris $\Longleftrightarrow W\left\{\sum_i c_i u_i[k]\right\} = \sum_i c_i W\{u_i[k]\}$

$\longleftrightarrow$ nemlineáris

b.) Invariáns $\Longleftrightarrow W\{u[k-L]\} = y[k-L]$

$\longleftrightarrow$ variáns

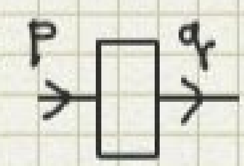
c.) Kauzalitás $\Longleftrightarrow y[k_0] = W\{\varepsilon[k_0-k]\cdot u[k]\}, \forall k_0$

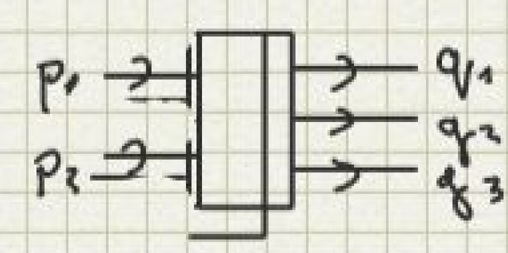
$\longleftrightarrow$ akauzális

d.) G-V stabilitás $\Longleftrightarrow$ $\forall$ korlátos gerjesztésre korlátos a válasz $\longleftrightarrow$ instabil, labilis

III.) A DI jelfolyam-hálózat

komponens:

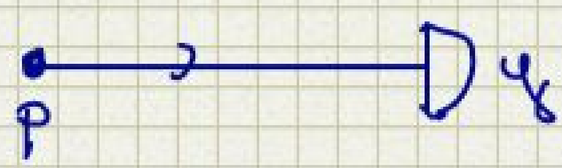




1.) Alapelemek, karakterisztikák

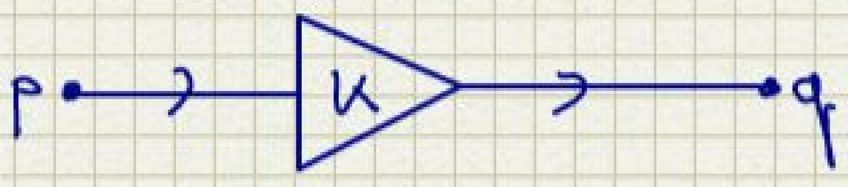
a.) Forrás: $u\ \mathrm{D}\!\longrightarrow\!\bullet\ q$ $\quad q[k] = u[k]$,

a jelfolyam hálózat bemenete $u[k]$ előírt b.) Nyelő:



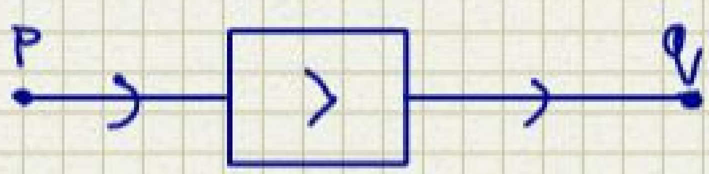
$q[k]=p[k]$, $q[k]$ meghatározandó

c.) Erősítő/Szorzó:



$q[k]=Kp[k]$

d.) Késleltető:



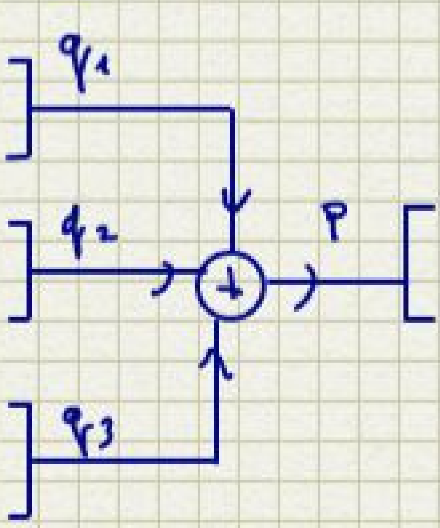
$q[k]=p[k-1]$

- ezekből a/b/c) memóriamentes

- összekapcsolási kényszer:

2.) Összekapcsolás:

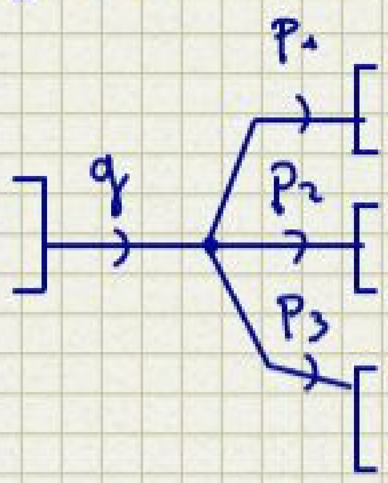
a) Összegző:



$p[k]=q_1[k]+q_2[k]+q_3[k]$

ill.: $p[k]=\sum_i q_i[k]$

b.) Elágazás

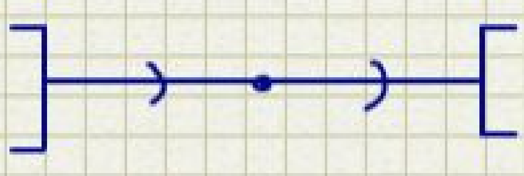


$p_1[k] = q[k]$

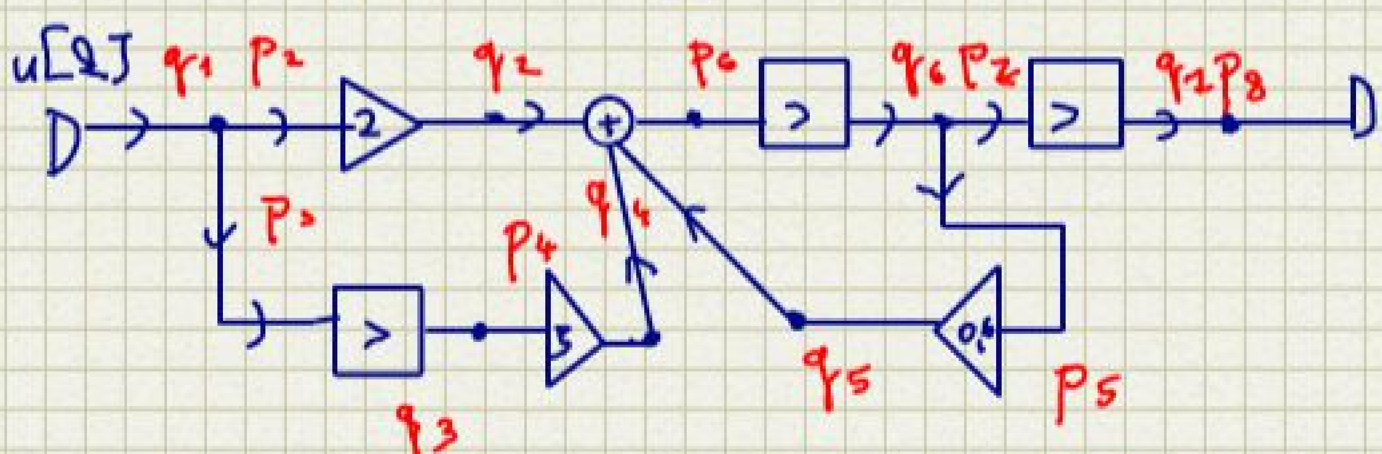
$p_2[k] = q[k]$

$p_3[k] = q[k]$

c.) Egyszerű



3.) A hálózati egyenletek teljes rendszere. (példa)



karakterisztikák: $q_1[k] = u[k]$ (adott)

$q_2[k] = 2p_2[k]$

$q_3[k] = p_3[k-1]$

$q_4[k] = 5p_4[k]$

$q_5[k] = 0{,}6p_5[k]$

$q_6[k] = p_6[k-1]$

$q_7[k] = p_7[k-1]$

(keresett) $y[k] =$

összekapcsolás:

$$p_2[k] = q_1[k]$$
$$p_3[k] = q_1[k]$$
$$p_4[k] = q_3[k]$$
$$p_6[k] = q_2[k] + q_4[k] + q_5[k]$$
$$p_7[k] = q_6[k]$$
$$p_5[k] = q_6[k]$$
$$p_8[k] = q_7[k]$$

14 ismeretlen
14 egyenlet
differenciálegyenlet rendszer
+3 kezdeti feltétel
ill: q_3, q_6, q_7

[DI rendszerek analízise időtartományban]

Az impulzusválasz és alkalmazása

I.) $h[k]$

1. Def:

$$\delta[k] \longrightarrow \boxed{DI, LI} \longrightarrow h[k]$$

$$\boxed{h[k] = W\{\delta[k]\}}$$

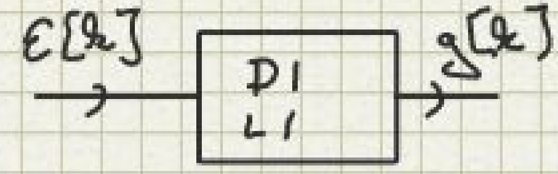
2. FIR (finite impulse response) típusú rendszer

$$h[k] = 0, \quad k < 0 \quad \text{ill} \quad k \geq L$$

$$h[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-L]\} \cdot h[k] =$$

$$= h_0 \delta[k] + h_1 \delta[k-1] + \ldots + h_{L-1} \delta[k-(L-1)]$$

3.) Ugrásválasz $\underbrace{g[k] = W\{\varepsilon[k]\}}$

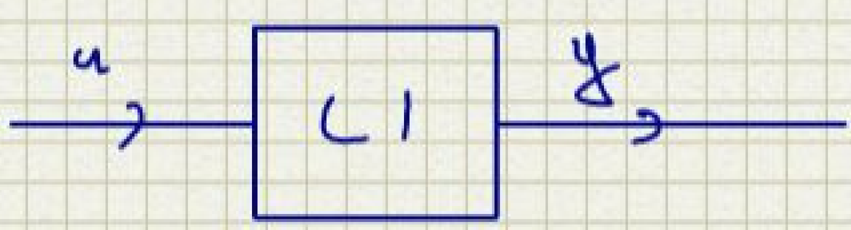


$$\delta[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-1] \xrightarrow[\text{inv.}]{\text{lin.}} h[k] = g[k] - g[k-1]$$

$$\varepsilon[k] = \sum_{i=-\infty}^{k} \delta[i] \longrightarrow g[k] = \sum_{i=-\infty}^{k} h[i]$$

II.) h válasz kifejezése   alap: $u[k]$ felbontása

„pálcikákra": $u[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i]\cdot\delta[k-i]$



- $\delta[k] \rightarrow h[k]$ (def.)
- $\delta[k-i] \rightarrow h[k-i]$ (invar.)
- $u[i]\cdot\delta[k-i] \rightarrow u[i]\,h[k-i]$ (lin.)
- $\underbrace{\sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i]\delta[k-i]}_{u[k]} \longrightarrow \underbrace{\sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i]\,h[k-i]}_{y[k]}$ (lin.)

$$\boxed{y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i]\,h[k-i] \equiv u * h}$$

konvolúció tétel

$$y[k]=\sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i]\cdot u[k-i]$$

spec: $h[k]$ és $u[k]$ belépő: $y[k]=\sum_{i=0}^{k} u[i]\, h[k-i]$

$$y[0]=u[0]\cdot h[0]$$
$$y[1]=u[0]h[1]+u[1]h[0]$$
$$y[2]=u[0]h[2]+u[1]h[1]+u[2]h[0]$$
$$\vdots$$

III.) Polinomok szorzása*

$$p(x)=p_0+p_1x+p_2x^2+\dots+p_mx^m$$
$$q(x)=q_0+q_1x+\dots+q_nx^n$$
$$r(x)=p(x)q(x)=r_0+r_1x+\dots r_{m+n}x^{m+n}$$

$$p[k]=\begin{cases}p_k, & 0\le k\le m\\ 0\end{cases}$$

$$q[k]=\begin{cases}q_k, & 0\le k\le n\\ 0\end{cases}$$

$$r[k]=\sum_{i=0}^{k} p[i]q[k-i]=\sum_{i=-\infty}^{\infty} p[i]q[k-i]=p*q$$

pl: $p(x) = 3 + x + 5x^2$

$q(x) = 5x - 3x^2$

MATLAB:

>> r = conv([ ],[ ])

k	-1	0	1	2	3	4	5
$p[k]$	0	3	1	5	0	0	0
$q[k]$	0	0	5	-3	0	0	0
$r[k]$	0	0	15	-4	22	-15	0

$r[0] = 3 \cdot 0 = 0$

$r[1] = 3 \cdot 5 + 1 \cdot 0 = 15$

$r[2] = 3(-3) + 1 \cdot 5 + 5 \cdot 0 = -4$

$r[3] = \ldots = 22$

$r[4] = \ldots = -15$

Impulzusválasz (ism)

DI, LI $\quad h[k] = W\{\delta[k]\}$

rendszerjellemző:

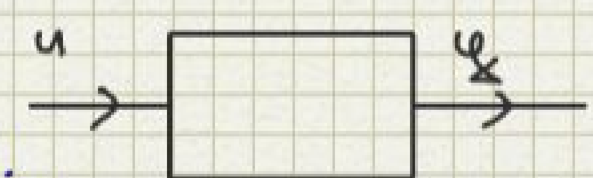
- $y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i] \cdot u[k-i]$

- kauzalitás $\Leftrightarrow$ $h[k]$ belépő

- GV stabilis $\Leftrightarrow$ $h[k]$ abszolút összegezhető

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

A RENDSZEREGYENLET



I. Def: DI, LI, SISO + kauzális

$$y[k] = b_0 u[k] + b_1 u[k-1] + \ldots + b_m u[k-m] -$$

$$- a_1 y[k-1] - a_2 y[k-2] - \ldots - a_n y[k-n]$$

autoregresszió $\qquad$ mozgó átlag

$$\boxed{y[k] + \overbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i y[k-i]}^{AR} = \overbrace{\sum_{j=0}^{m} b_j u[k-j]}^{MA}}$$

• ARMA: (autoregresszív, mozgó átlag) rendszerek.

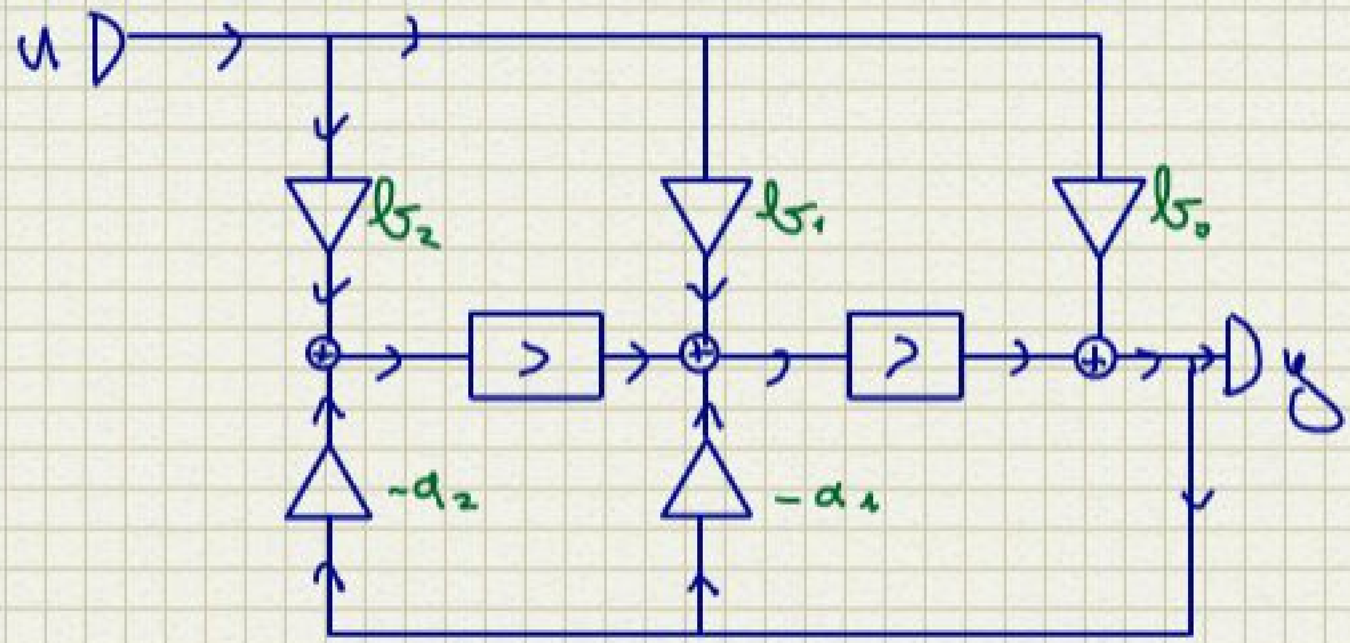
Példa: $y[k] = 0{,}7\,y[k-1] - 0{,}24\,y[k-2] + 2u[k] -$

$- 1{,}8\,u[k-1]$ $\quad n = 2$

$m = 1$

II. Kanonikus hálózatok:

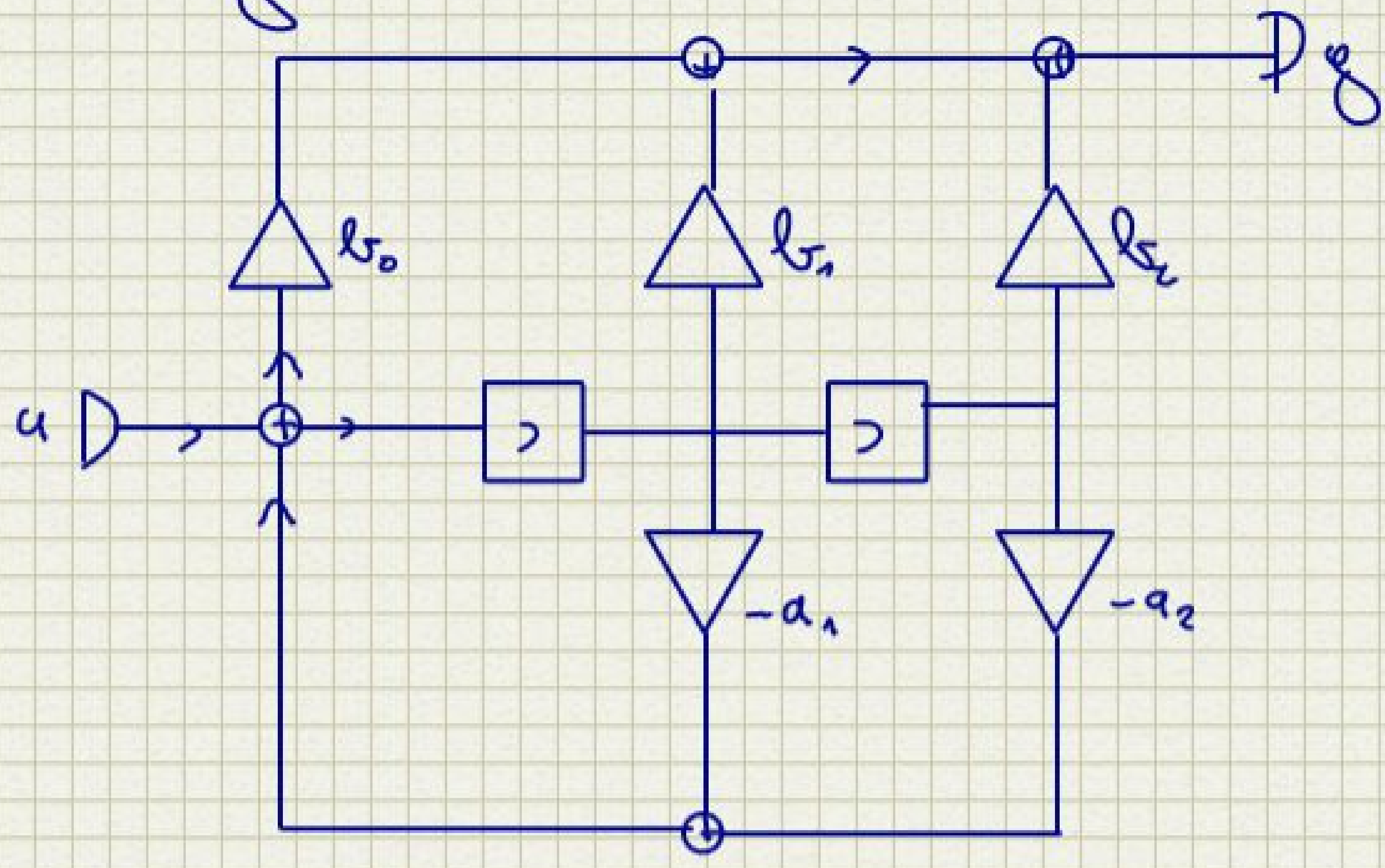
1.) pl: $n = 2$, $m = 2$



$$y[k] + a_1 y[k-1] + a_2 y[k-2] = b_0 u[k] + b_1 u[k-1] +$$

$$+ b_2 u[k-2]$$

2.) 1. duálja



III. Megoldás fokozatos behelyettesítéssel (lépésről lépésre)

tfh: $y[-1], y[-2], \dots, y[-n]$ adott (kezdeti feltétel)

$u[k], k \geq -m$ adott

$y[0] = -a_1 y[-1] - \dots - a_n y[-n] + b_0 u[0] + \dots + b_m u[m]$

$y[1] = -a_1 y[0] - \dots - a_n y[-n+1] + b_0 u[1] \dots$

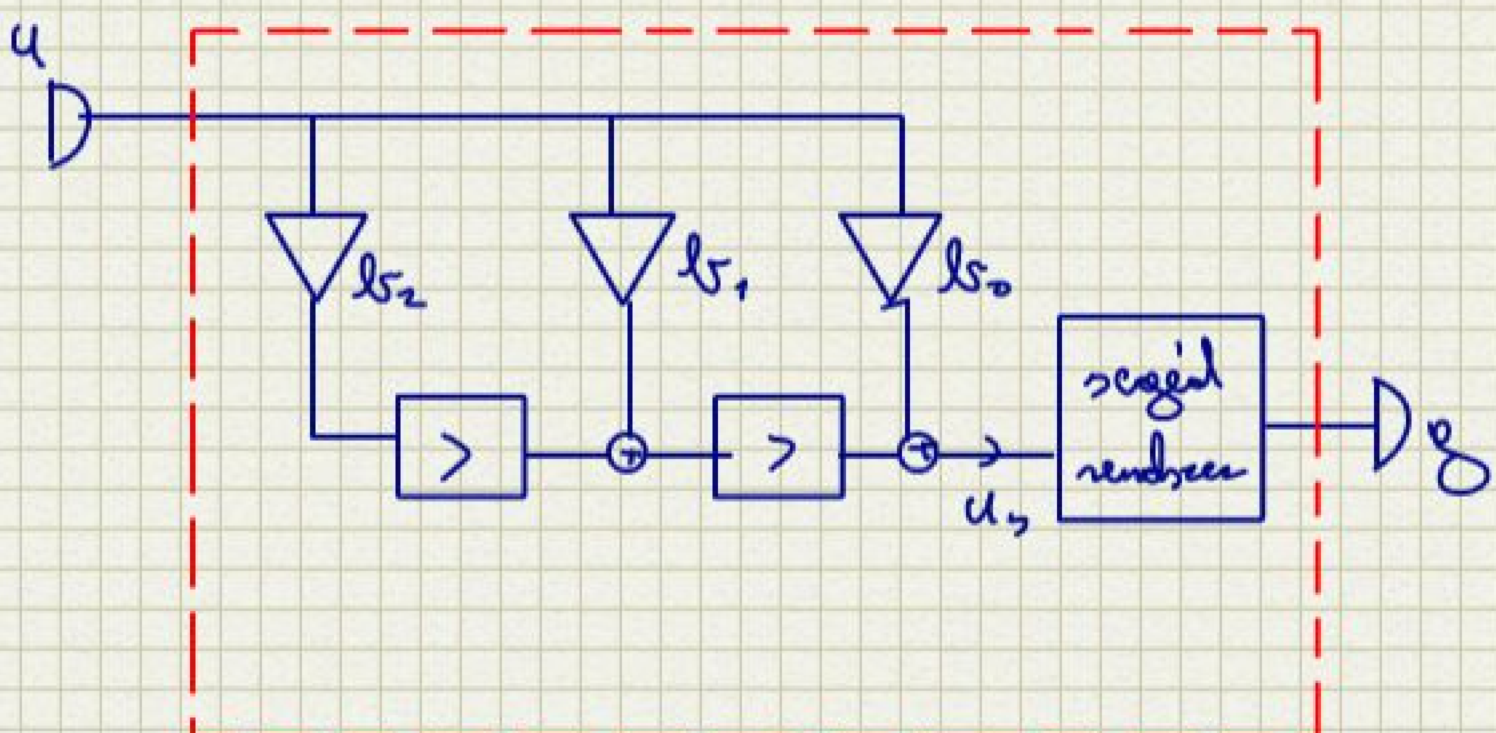
IV. Válaszjel számítása impulzusválasz $h[k]$ segítségével:

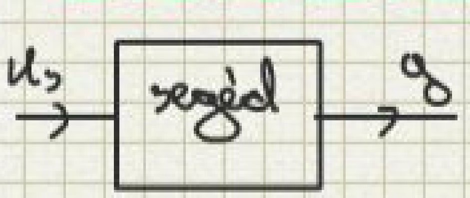
1. „Segédrendszer"

$$y[k]+a_1 y[k-1]+\ldots+a_n y[k-n]=$$

$$=\underbrace{b_0 u[k]+\ldots+b_m u[k-m]}_{u_s[k]}$$

szemléltetés hálózattal: (pl. $m=2$)





$$h_s[k]=W_s\{\delta[k]\}$$

$$LI \Rightarrow h[k]=b_0 h_s[k]+b_1 h_s[k-1]+\ldots+b_m h_s[k-m]$$

2.) $h_s[k]$ formulája

$u_s[k] = \delta[k]$ $u_s[k] = 0$, $k \geq 1$ → homogén diffegyenlet:

$y[k] + a_1 y[k-1] + \ldots + a_n y[k-n] = 0$

keressük $y[k] = C \cdot p^k$ alakban

⇓

$C p^k + a_1 C p^{k-1} + \ldots + a_n C p^{k-n} = 0 \quad / : C p^{k-n}$

$\underbrace{p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n = 0}_{\text{karakterisztikus egyenlet}}$

megoldás: p_i, $i = 1, \ldots, n$ ftlh: egyszeres

a) Hom ált. m.o.

$y[k] = C_1 p_1^k + C_2 p_2^k + \ldots + C_n p_n^k$

n db C_i paraméter

b.) C_i meghatározása, kezdeti felt.

- Melyik ütemtől érvényes?

Logikus: $k \geq 1$

Valójában: $k \geq 1-n = -(n-1)$

kezd. felt: $\underbrace{h_s[0], h_s[-1], \ldots, h_s[-(n-1)]}_{n \text{ db}}$

$u_s[k] = \delta[k]$

kauzalitás: $h_s[k]=0,\ k<0$

$h_s[0] = -a_1 h_s[-1] - a_2 h_s[-2] - \ldots - a_n h_s[-n] + \delta[0] = 1$

pl: $n=3$

$$\left.\begin{aligned} C_1 p_1^0 + C_2 p_2^0 + C_3 p_3^0 &= 1 \\ C_1 p_1^{-1} + C_2 p_2^{-1} + C_3 p_3^{-1} &= 0 \\ C_1 p_1^{-2} + C_2 p_2^{-2} + C_3 p_3^{-2} &= 0 \end{aligned}\right\} C_{1,2,3} \text{ számítható}$$

$$\boxed{h_s[k] = \varepsilon[k+n-1] \cdot \sum_{i=1}^{n} C_i p_i^k}$$

c.) $h[k]$

$$h[k] = \sum_{j=0}^{m} b_j \, \varepsilon[k+n-1-j] \sum_{i=1}^{n} C_i p_i^{k-j}$$

$$h[k] = \sum_{i=1}^{n} D_i p_i^{k}, \quad k \geq m+1-n$$

V Válaszjel számítása közvetlenül:

gyakorlaton!

VI G-V Stabilitás:

$$h[k] = \sum_{i=1}^{n} D_i p_i^{k}$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{|p_i| < 1, \quad i = 1, \dots, n}$$ egységkörön belül.

AZ ÁLLAPOTVÁLTOZÓS LEÍRÁS

I. Def.:

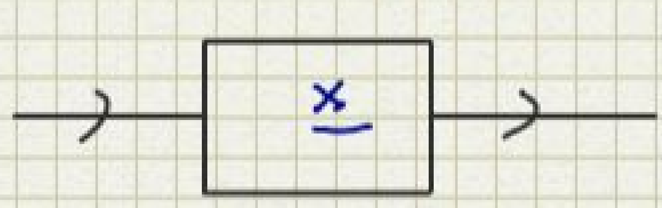
1.) „állapot": minimális számú változó

$x_i[k]$ $\quad i = 1, \dots, N$ amellyel

- $k \to k+1$ ütembeli állapot és $y[k]$ meghatározható.

- megválasztása nem egyértelmű

ált: a memóriával kapcsolatosak



2.) Általános alakja:

$$\underline{x}[k+1] = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}[k] + \underline{\underline{B}}\,\underline{u}[k]$$

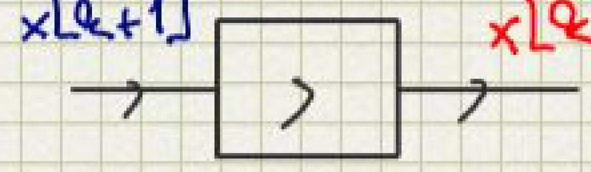
$$\underline{y}[k] = \underline{\underline{C}}\,\underline{x}[k] + \underline{\underline{D}}\,\underline{u}[k]$$

spec. SISO: (írás: $x[k+1] = x'$) !

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{x}' &= \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{b}\,u \\ y &= \underline{c}^T \underline{x} + D u \end{aligned}}$$

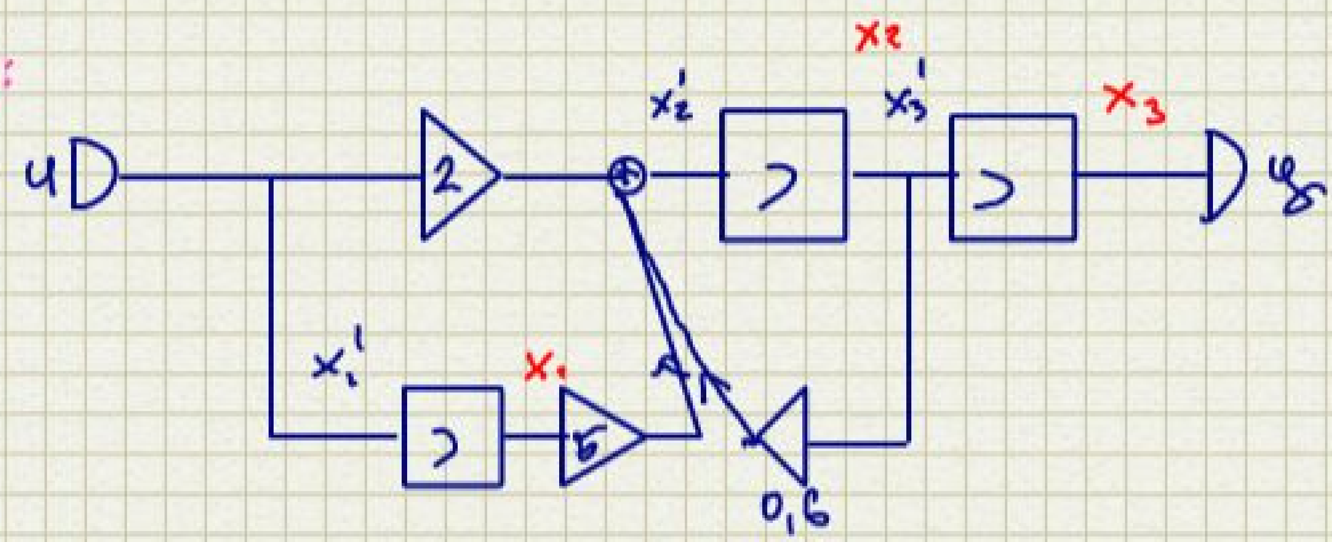
II. Megoldás egyéb rendszerleírásokkal.

1.) A hálózat állapotegyenletei:



praktikus választás

példa:



$x_1' = u$

$x_2' = 5x_1 + 0{,}6\,x_2 + 2u$

$x_3' = x_2$

$y = x_3$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{b}} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{0}_{d} \cdot u$$

Állapotváltozós leírás:

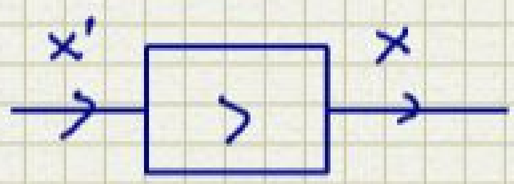
I. Def:

$$\underline{x}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{b}\,u$$

$$y = \underline{c}^T \underline{x} + d u$$

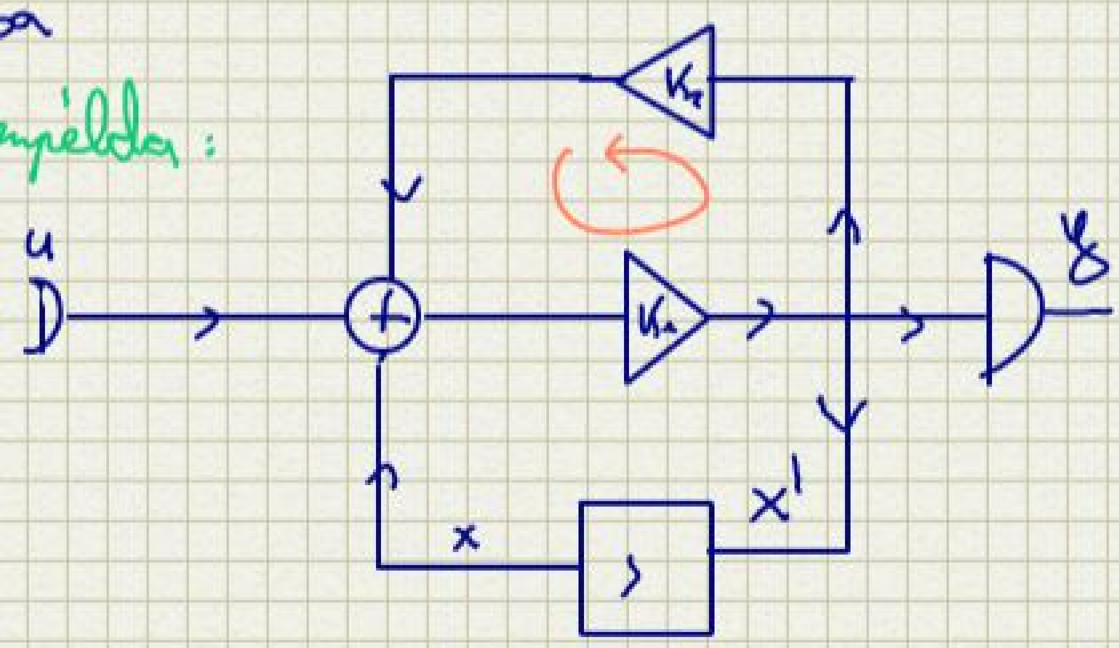
II. Kapcsolatok

1. Hálózatból



- a hálózat reguláris $\Longleftrightarrow \exists$ állapotváltozós leírása

ellenpélda:



$$x' = K_1(u + x + K_2 x') =$$

$$= K_1 u + K_1 x + K_1 K x'$$

$$x' = \frac{K_1}{1 - K_1 K_2} x + \frac{K_1}{1 - K_1 K_2} u$$

nem érte., ha $K_1 K_2 = 1$

strukturálisan / parametrikusan nemreguláris

$\Rightarrow$ memóriamentes hurok

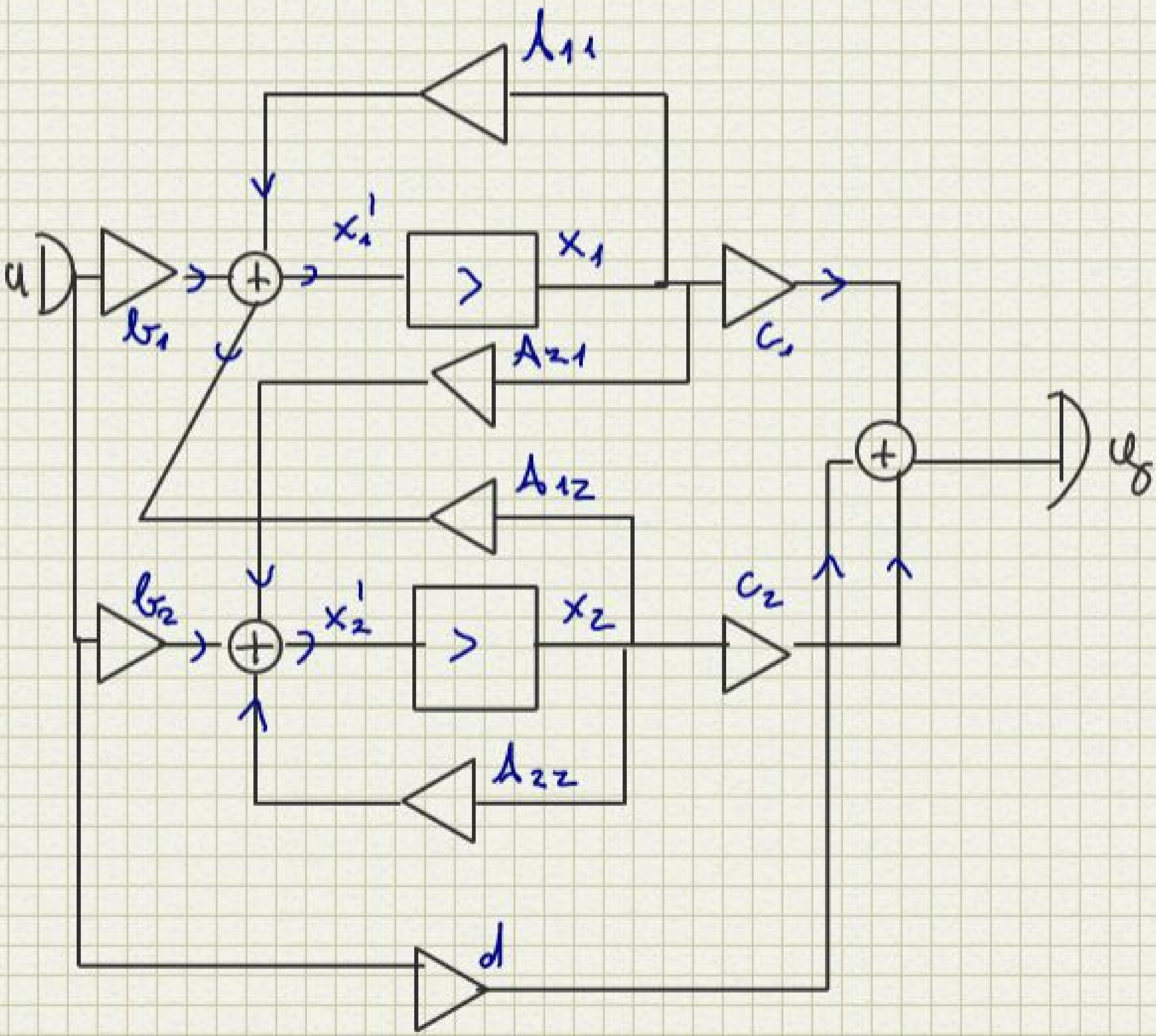
2.) Realizáció hálózattal (nem egyértelmű)

sablon: $N=2$ -re

$$x_1' = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + b_1 u$$

$$x_2' = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + b_2 u$$

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + du$$



3.) Rendszeregyenlet → állapotegyenlet

Frobenius - módszer

pl: $y[k] = 0{,}7y[k-1] - 0{,}94\, y[k-2] + 2u[k] -$

$- 1{,}8u[k-1] \quad (n = 2;\, m = 1)$

legyen: $x_1[k] = y[k-1]$

$x_2[k] = y[k-2]$

$x_3[k] = u[k-1]$

$x_1[k+1] = 0{,}7x_1[k] - 0{,}94\, x_2[k] - 1{,}8x_3[k] +$

$+ 2u[k]$

$x_2[k+1] = x_1[k]$

$x_3[k+1] = u[k]$

$y[k] = x_1[k+1] = \ldots$

III. Állapotegyenletek transzformálása

$$\left.\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= T_{11}x_1 + T_{12}x_2 + \dots + T_{1N}x_N \\ \tilde{x}_2 &= T_{21}x_1 + \dots \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \quad \underline{\tilde{x}} = \underline{\underline{T}}\,\underline{x}$$

$\underline{\underline{T}}$ $N \times N$,

nem szinguláris

$$\rightarrow \underline{x} = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\tilde{x}}$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{\underline{T}}\,\underline{x}' &= \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\tilde{x}} + \underline{\underline{T}}\,\underline{b}\,u \\ y &= \underline{c}^T\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\tilde{x}} + du \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \underline{\tilde{x}}' &= \underline{\underline{\tilde{A}}}\,\underline{\tilde{x}} + \underline{\tilde{b}}\,u \\ y &= \underline{\tilde{c}}^T\underline{\tilde{x}} + du \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{T}}\,\underline{x}' = \left(\underline{\underline{T}}\,\underline{x}\right)' = \underline{\tilde{x}}'$$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{\tilde{A}}} &= \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}}^{-1} \\ \underline{\tilde{b}} &= \underline{\underline{T}}\,\underline{b} \\ \underline{\tilde{c}}^T &= \underline{c}^T\underline{\underline{T}} \\ \tilde{d} &= d \end{aligned}}$$

$\underline{\underline{\tilde{A}}} = \underline{\underline{\Lambda}} = \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{M}}$ spektrálfelbontás

$\uparrow$

modálmátrix

$\underline{\underline{\Lambda}} \leq \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n >$

$\leftarrow \det(\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}) = 0$

(λ egyszeres)

IV. Állapotegyenletek megoldása

1. Fokozatos behelyettesítés

$\underline{x}[0]$ adott (kezd. felt) $\rightarrow y[0] = \underline{c}^T \underline{x}[0] + d\,u[0]$

$\underline{x}[1] = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}[0] + \underline{b}\,u[0] \rightarrow y[1] = \underline{c}^T \underline{x}[1] + d\,u[1]$

$\underline{x}[2] = \ldots$

$\vdots$

spec: $u[k]$ belépő $\Rightarrow \underline{x}[0] = \underline{0}$

fth: $\underline{x}[-1] = \underline{0}$

$$\Rightarrow \underline{x}[0] = \underline{\underline{A}}\,\underbrace{\underline{x}[-1]}_{\underline{0}} + \underline{b}\,\underbrace{u[-1]}_{0} = \underline{0}$$

2. A megoldás formulája

$\underline{x}[0]$ adott

$\underline{x}[1] = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}[0] + \underline{b}\,u[0]$

$\underline{x}[2] = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}[1] + \underline{b}\,u[1] = \underline{\underline{A}}^2 \underline{x}[0] + \underline{\underline{A}}\,\underline{b}\,u[0] + \underline{b}\,u[1]$

$\underline{x}[3] = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}[2] + \underline{b}\,u[2] = \underline{\underline{A}}^3 \underline{x}[0] + \underline{\underline{A}}^2 \underline{b}\,u[0] + \underline{\underline{A}}\,\underline{b}\,u[1] + \underline{b}\,u[2]$

$\vdots$

$$\underline{x}[k] = \underbrace{\underline{\underline{A}}^k \underline{x}[0]}_{\text{zérus gerj}} + \overbrace{\sum_{i=0}^{k-1} \underline{\underline{A}}^{k-i-1} \cdot \underline{b}\,u[i]}^{\text{zérus állapotú}} \qquad k \geq 1$$

$$y[k] = \begin{cases} \underline{c}^T \underline{x}[0] + d u[0] & k = 0 \\ \underline{c}^T \underline{\underline{A}}^k \underline{x}[0] + \underline{c}^T \sum_{i=0}^{k-1} \underline{\underline{A}}^{k-i-1} \cdot \underline{b}\, u[i] + d u[k], & k \geq 1 \end{cases}$$

③ Impulzusválasz $u[k] = \delta[k]$, $\underline{x}[0] = \underline{0}$

(mert $u[k]$ belépő)

$$h[k] = \begin{cases} d\delta[0], & k = 0 \\ \underline{c}^T \sum_{i=0}^{k-1} \underline{\underline{A}}^{k-i-1} \cdot \underline{b} \cdot \delta[i] + \underbrace{d\delta[k]}_{0}, & k \geq 1 \end{cases}$$

$\rightarrow \underline{c}^T \underline{\underline{A}}^{k-1} \underline{b}$

$$\boxed{h[k] = d\delta[k] + \varepsilon[k-1]\, \underline{c}^T \underline{\underline{A}}^{k-1} \underline{b}}$$

④ $\underline{\underline{A}}^k$ számítása Lagrange-mátrixokkal

mátrixfüggvény: $f(\underline{\underline{A}}) = \sum_{i=1}^{N} f(\lambda_i) \cdot \underline{\underline{L}}_i$

$$\underline{\underline{L}}_i = \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{N} \frac{\underline{\underline{A}} - \lambda_p \underline{\underline{E}}}{\lambda_i - \lambda_p}, \quad \det(\lambda \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}) = 0, \ \lambda_i \text{ egyszeres}$$

$$\rightarrow \boxed{\underline{\underline{A}}^k = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^k \underline{\underline{L}}_i}$$

spec. eset*: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$ egyszeres és $\lambda_{M+1}, \dots, \lambda_N = 0$

$$\underline{\underline{A}}^k = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i^k \underline{\underline{L}}_i \text{, csak } k \geq M\text{-re érvényes}$$

$$\underline{\underline{L}}_i = \frac{\underline{\underline{A}}^{N-M}}{\lambda_i^{N-M}} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{M} \frac{\underline{\underline{A}} - \lambda_p \underline{\underline{E}}}{\lambda_i - \lambda_p}, \quad i = 1, \dots, M$$

5.* A rendszeregyenlet szabad megoldásának érvényessége

$$y[k] + \sum_{i=1}^{n} a_i y[k-i] = u_s[k] \rightarrow h_s[k] = \sum_{i=1}^{n} C_i p_i^k,$$

$$k \geq 1-n = -(n-1)$$

pl: $n = 3$

r. egyenlet:

$$y[k] + a_1 y[k-1] + a_2 y[k-2] +$$
$$+ a_3 y[k-3] = u_s[k]$$

legyen: $x_1[k] = y[k-1]$

$x_2[k] = y[k-2]$

$x_3[k] = y[k-3]$

$x_1[k+1] = -a_1 x_1[k] - a_2 x_2[k] - a_3 x_3[k] + u_s[k]$

$x_2[k+1] = x_1[k]$

$x_3[k+1] = x_2[k]$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$u_s[k] = \delta[k] \Rightarrow \underline{x}[0] = \underline{0} \qquad u_s[k] = 0,\ k \geq 1$

$\underline{x}[k] = \underline{\underline{A}}^{k-1} \cdot \underline{b}\ ,\ k \geq 1$

$k = 1$-re :

$x_1[1] = y[0]$

$x_2[1] = y[-1]$

$x_3[1] = y[-2]$

V. Aszimptotikus stabilitás

1. Def: $u[k] = 0 \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} \underline{x}[k] = \underline{0}$

2. Feltétel: $u[k] = 0 \rightarrow \underline{x}[k] = \underline{\underline{A}}^k \underline{x}[0]$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{M}}\ \underline{\underline{\Lambda}}\ \underline{\underline{M}}^{-1} \longrightarrow \underline{\underline{A}}^k = \underline{\underline{M}}\ \underline{\underline{\Lambda}}\ \underline{\underline{M}}^{-1}$$

$$\underline{\underline{\Lambda}}^k = \langle \lambda_1^k\ \lambda_2^k, \dots, \lambda_N^k \rangle$$

$$\lambda_i^k = (r_i \cdot e^{j\beta_i})^k = r_i^k \cdot e^{jk\beta_i}$$

$$|\lambda_i^k| = r_i^k$$

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_i^k = 0 \iff r_i = |\lambda_i| < 1$$

$$\boxed{\text{aszimptotikus stabilitás} \iff |\lambda_i| < 1,\ i = 1, \dots, N}$$

⊙ egységkörön belül

Jury-kritérium

Aszimptotikus Stabilitás

$$\text{def: } u[k] = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \underline{x}[k] = \underline{0}$$

$$\text{krit.: } |\lambda_i| < 1,\ i = 1, \dots, N$$

(3.) A Jury-kritérium

ⓐ Hurwitz-kritérium (ism.)

$$x^N \cdot a_1 x^{N-1} + \dots + a_{N-1} x + a_N = 0$$

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_N) = 0$$

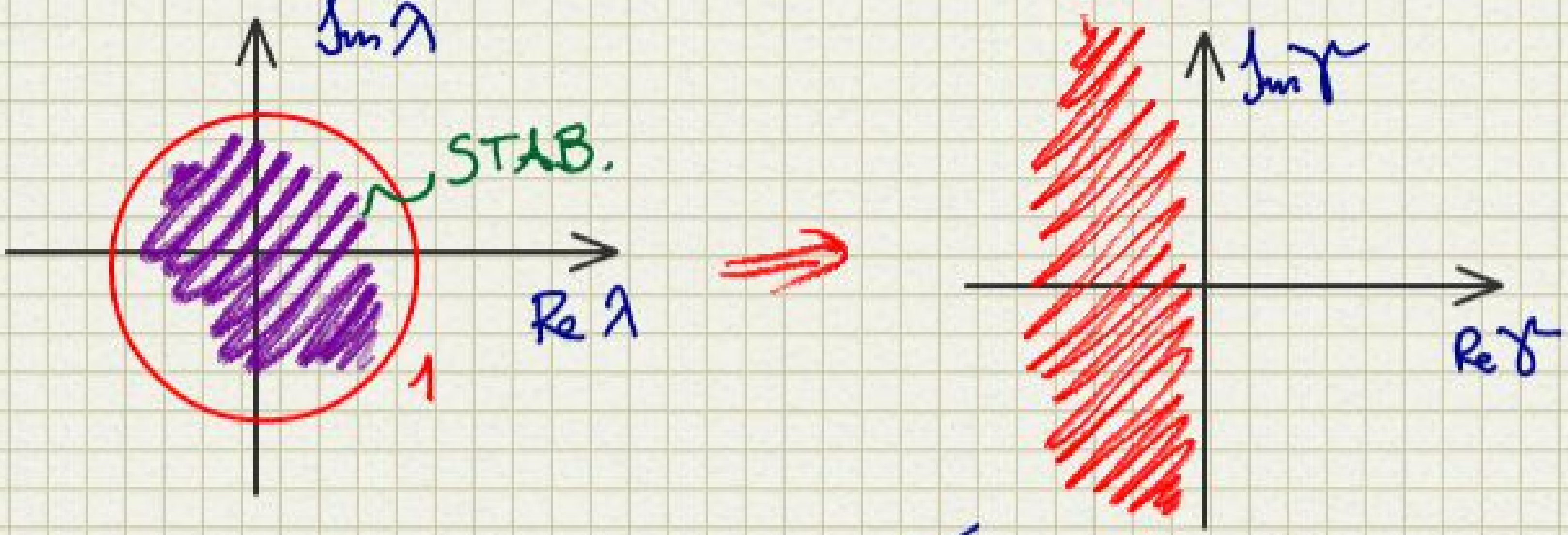
Hurwitz: $\mathrm{Re}\{x_i\} < 0\ \forall i \Rightarrow a_i > 0,\ \forall i$

spec. $N = 2$ $\quad x^2 + a_1 x + a_2 = 0$

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$\mathrm{Re}\{x_{1,2}\} < 0 \Rightarrow a_{1,2} > 0$$

b.) Transzformáció $\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$



• legyen $\gamma = \dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}$ bilineáris transzformáció

$$\lambda = \frac{\gamma+1}{-(\gamma-1)}$$

$$\left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)+a_1\left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)+a_2=0$$

$$\gamma^2(1-a_1+a_2)+\gamma(2-2a_2)+(1+a_1+a_2)=0$$

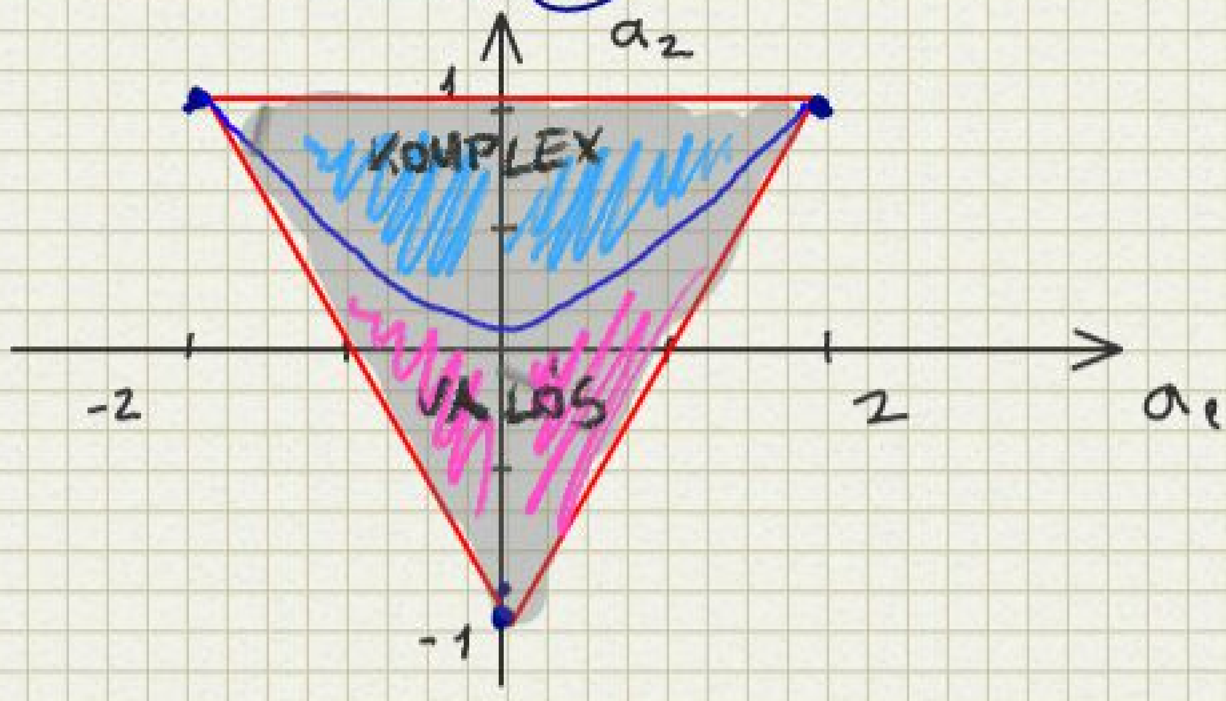
$$\left.\begin{array}{r} 1-a_1+a_2>0 \\ 2-a_2>0 \\ 1+a_1+a_2>0 \end{array}\right\} \quad \boxed{\begin{array}{l} a_2<1 \\ |a_1|<1+a_2 \end{array}}$$

Jury-kritérium

diszkrimináns: $4(1-a_2)^2-4(1+a_2-a_1)(1+a_2+a_1)=0$

$$\Longrightarrow a_2=\frac{a_1^2}{4}$$

(c.) Stabilitási háromszög

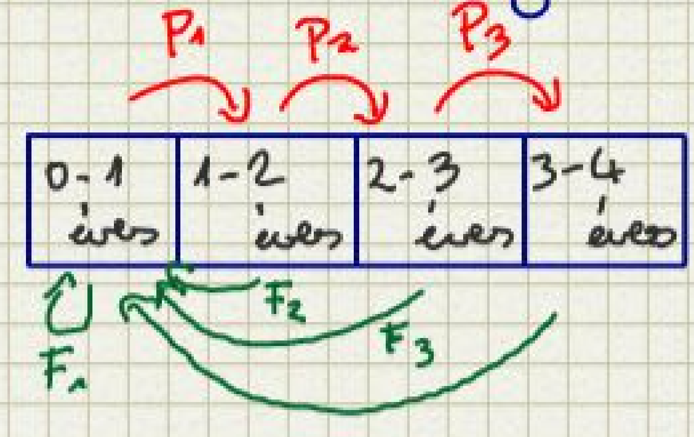


Leslie-modell* (1945) (irodalomjegyzék)

(1.) Lineáris modell állatpopuláció fejlődésére

- éves mintavétel
- csak nőstények száma
- paraméterek:
  - p_i - túlélési ráta:
    P(az i éves nőstény megéri az (i+1) éves kort)
  - reprodukciós ráta
    - az i éves nőstény ennyi egyedet szül egy év alatt
- kimenet:
  - elméleti exponenciális növekedési ráta
  - aszimptotikus állandósult korelosztás „korfa”

pl: lazacok, mint diszkrét idejű rendszer



$F_4 \rightarrow$ 0 és 4 év közti nőstény utódok szül.

② Leírás DI rendszerrel

legyen $x_i[k]$ az $(i-1)$-i éves kor közötti nőstények száma a k. évben

$$x_1[k+1] = F_1 \cdot x_1[k] + F_2 x_2[k] + F_3 x_3[k] + F_4 x_4[k]$$

$$x_2[k+1] = P_1 \cdot x_1[k]$$

$$x_3[k+1] = P_2 \cdot x_2[k]$$

$$x_4[k+1] = P_3 \cdot x_3[k]$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & 0 \end{bmatrix}$$ Frobenius

rendszeregyenlet: $y[k] = F_1 y[k-1] + F_2 P_1 y[k-2] +$

$+ F_3 P_1 P_2 y[k-3] + F_4 P_1 P_2 P_3 y[k-4]$

karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^4 - F_1\lambda^3 - F_2 P_1 \lambda^2 - F_3 P_1 P_2 \lambda - F_4 P_1 P_2 P_3 = 0$$

megoldás: $\underline{x}[k] = \underline{\underline{A}}^k \cdot \underline{x}[0],\ k \geq 1$

$$\underline{\underline{A}}^k = \lambda_1^k \underline{\underline{L}}_1 + \lambda_2^k \underline{\underline{L}}_2 + \lambda_3^k \underline{\underline{L}}_3 + \lambda_4^k \underline{\underline{L}}_4$$

példa:

$F_1 = 0;\ F_2 = 0;\ F_3 = 2000;\ F_4 = 5000$

$P_1 = 0{,}5\%,\ P_2 = 7\%,\ P_3 = 20\%$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2000 & 5000 \\ 0{,}005 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}07 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \lambda^4 - 0{,}07\lambda - 0{,}35 = 0$$

$\lambda_1 = 1{,}015$ NEM ASZ. STABIL

$\lambda_{2,3} = -0{,}285 \pm j0{,}834 = 0{,}88 e^{\pm j1{,}9}$

$\lambda_4 = 0{,}444$

Ha k elég nagy: $\underline{\underline{A}}^k \cong (1{,}015)^k \underline{\underline{L}}_1$

$$\underline{\underline{L}}_1 = \prod_{\substack{p=1 \\ p\neq 1}}^{4} \frac{\underline{\underline{A}} - \lambda_p \underline{\underline{E}}}{\lambda_1 - \lambda_p} = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 60{,}94 & 883{,}48 & 1479{,}63 \\ 0 & 0{,}3 & 4{,}35 & 7{,}28 \\ 0 & 0{,}02 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}06 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

$$x[k] \cong \underline{\underline{A}}^k \underline{x}[0] = (1{,}015)^k \cdot \underline{\underline{L}}_1 \underline{x}[0]$$

a) legyen $\underline{x}[0] = [1000 \ \ 1000 \ \ 1000 \ \ 1000]^T$

$$x[k] \cong (1{,}015)^k \begin{array}{c l} \begin{bmatrix} 2{,}42 \cdot 10^6 \\ \hline 11940 \\ 824 \\ 163 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{ikrák} \\ \to 92{,}4\% \\ \to 6{,}3\% \\ \to 1{,}3\% \end{array} \end{array}$$

b) itt legyen $\underline{x}[0] = [1000 \ \ 500 \ \ 250 \ \ 125]$

$$\underline{x}[k] = (1{,}015)^k \begin{array}{c l} \begin{bmatrix} 4{,}35 \cdot 10^5 \\ \hline 2149 \\ 148 \\ 28 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{ikrák} \\ 92{,}4\% \\ 6{,}3\% \\ 1{,}3\% \end{array} \end{array}$$

Szinuszos állandósult állapot

I. A DI szinuszos jel

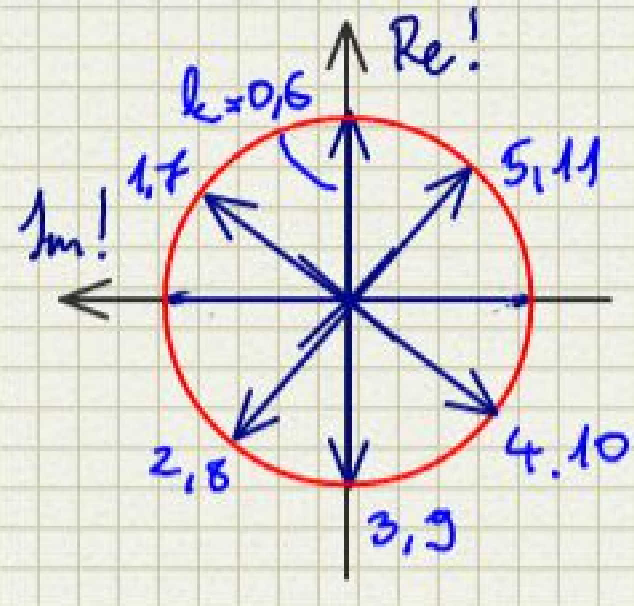
1. Def: $x[k] = \hat{X} \cos(\vartheta k + \rho)$ periodikus

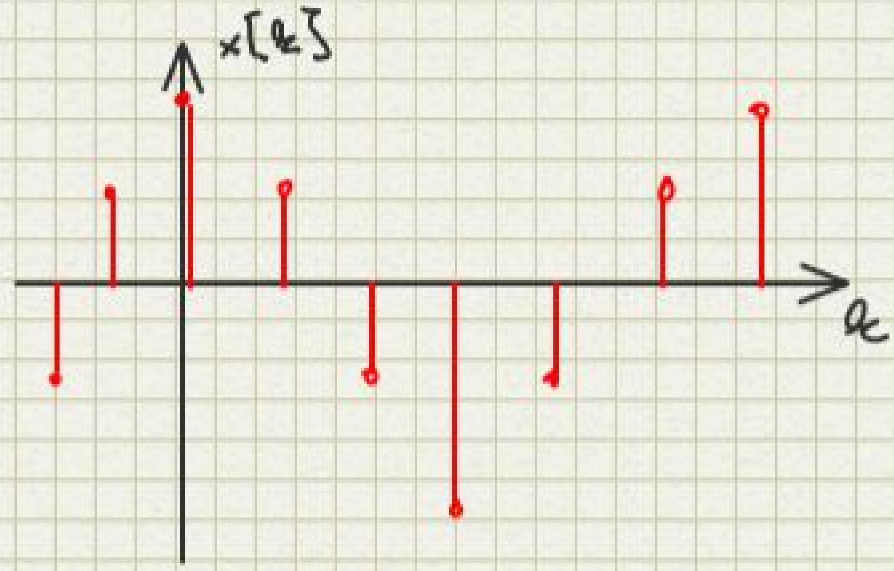
$\Leftrightarrow \frac{\vartheta}{2\pi} = \frac{M}{L}$, $M \in \mathbb{Z}$, $L \in \mathbb{Z}^+ \to L$ a periódus

$L \to \vartheta$ nem egyért. !

② **Komplex leírás** $x[k] = \mathrm{Re}\{\hat{X}\cdot e^{j(\vartheta k+\rho)}\} = \mathrm{Re}\{\hat{X}\cdot e^{j\rho}\cdot e^{j\vartheta k}\}$

$\boxed{\overline{X} = \hat{X}\cdot e^{j\rho}}$ kompl. ampl.: $\underline{x[k] = \mathrm{Re}\{\overline{X}\cdot e^{j\vartheta k}\}}$





pl: $x[k] = \cos\left(\frac{\pi}{3}k\right) \rightarrow \hat{X}=1;\ \rho=0;\ \vartheta=\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{6}=2\pi\frac{1}{6} \rightarrow L=6$

③ **Műveletek fazorokkal**

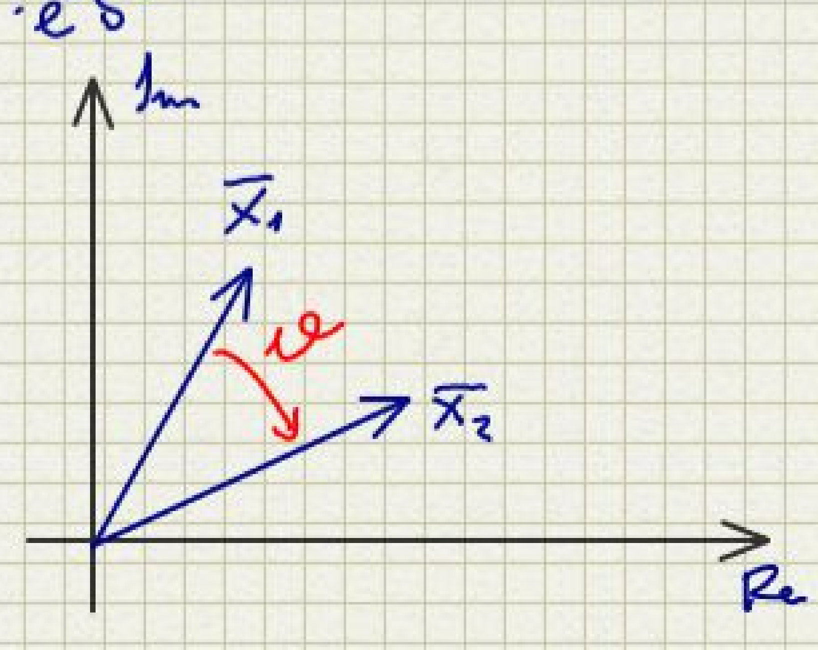
a.) $x_3[k] = x_1[k] + x_2[k] \Leftrightarrow \overline{X}_3 = \overline{X}_1 + \overline{X}_2$

b.) $x_2[k] = K\,x_1[k] \Leftrightarrow \overline{X}_2 = K\,\overline{X}_1$

c.) $x_2[k] = x_1[k-1] \Leftrightarrow \overline{X}_2 = \overline{X}_1\cdot e^{-j\vartheta}$

biz: $\mathrm{Re}\{\overline{X}_2 e^{j\vartheta k}\} = \mathrm{Re}\{\overline{X}_1\cdot e^{-j\vartheta}\cdot e^{j\vartheta k}\}\ \forall k$

$\overline{X}_2 = \overline{X}_1\cdot e^{-j\vartheta}$



d.) Példák: $x_1[k]=2\cos(\vartheta k)$; $x_2[k]=3x_1[k-2]$, $\vartheta=\frac{\pi}{3}$

$$\overline{X}_1=2\,;\quad \overline{X}_2=3\overline{X}_1\cdot e^{-j2\vartheta}=6\cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\rightarrow x_2[k]=6\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}k-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$x_1[k]=3\cos\left(\vartheta k-\frac{\pi}{3}\right)$; $x_2[k]=5\cdot\cos(\vartheta k+1,1)$

$x[k]=x_1[k]+x_2[k]=?$

$$\overline{X}_1=3\cdot e^{-j\pi/3}=1,5-j2,6\,;\quad \overline{X}_2=5\cdot e^{j1,1}=2,27+j4,46$$

$$\overline{X}=\overline{X}_1+\overline{X}_2=3,77+j1.86=4,2e^{j0,46}$$

$$\rightarrow x[k]=\underline{4.2\cos(\vartheta k+0,46)}$$

II. Rendszeranalízis

1. Állandósult állapot

$$y[k] = y_t[k] + y_g[k]$$

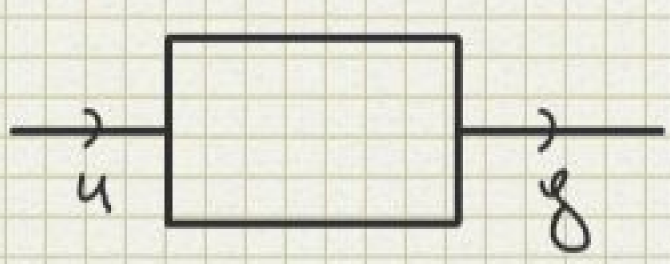
G-V stab. $:\Longleftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} y_t[k] = 0$

$$\lim_{k\to\infty} y[k] = y_g[k]$$

$$y_g[k] \sim u[k]$$

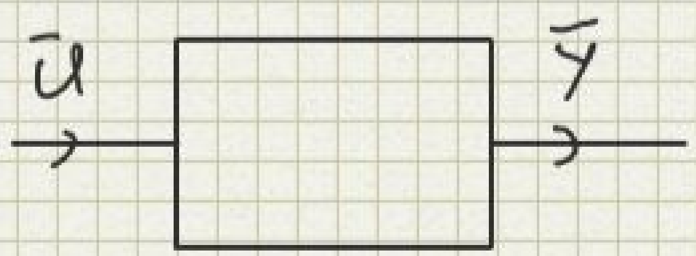
$$u[k] = U\cos(\vartheta k + \rho_u) \Longrightarrow y[k] = Y\cdot\cos(\vartheta k + \rho_y)$$

2. Átviteli tényező és karakterisztika



$$u[k] = \mathrm{Re}\{\bar{U}\cdot e^{j\vartheta k}\}$$

$$y[k] = \mathrm{Re}\{\bar{Y}\cdot e^{j\vartheta k}\}$$



$$\boxed{\frac{\bar{Y}}{\bar{U}} = \bar{H}} \rightarrow \boxed{H(e^{j\vartheta}) = \frac{\bar{Y}_\vartheta}{\bar{U}_\vartheta}}$$

ÁTVITELI TÉNYEZŐ

KARAKTERISZTIKA

$$H(e^{j\vartheta}) = H(\vartheta) \cdot e^{j\vartheta(\varphi)}$$

$H(\vartheta) = K(\vartheta)$ - ampl. kar.

$\varphi(\vartheta)$ - fáziskar.

(a) Tulajdonságai:

paritás: $H(e^{-j\vartheta}) = [H(e^{j\vartheta})]^*$

$K(-\vartheta) = K(\vartheta)$

$\varphi(-\vartheta) = -\varphi(\vartheta)$

periodikusság: $H(e^{j(\vartheta+2\pi)}) = H(e^{j\vartheta}), \forall \vartheta$

- korlátos: $|K(\vartheta)| < \infty, \forall \vartheta \Leftarrow$ G-V stab.

(3.) $H(e^{j\vartheta})$ és a rendszeregyenlet

$$y[k] + a_1 y[k-1] + \ldots + a_n y[k-n] = b_0 u[k] + b_1 u[k-1] + \ldots + b_m u[k-m]$$ diff. egyenlet

$$\bar{Y} + a_1 \bar{Y} e^{-j\vartheta} + \ldots + a_n \bar{Y} e^{-jn\vartheta} = b_0 \bar{U} + b_1 \bar{U} e^{-j\vartheta} + \ldots + b_m \bar{U} e^{-jm\vartheta}$$ algebrai egyenlet

$$\bar{Y}(1 + a_1 e^{-j\vartheta} + \ldots + a_n e^{-jn\vartheta}) = \bar{U}(b_0 + b_1 e^{-j\vartheta} + \ldots + b_m e^{-jm\vartheta})$$

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{b_0+b_1e^{-j\vartheta}+\dots b_m e^{-jm\vartheta}}{1+a_1e^{-j\vartheta}+\dots+a_n e^{-jn\vartheta}}$$ átv. fv. normálalakja

4. $H(e^{j\vartheta})$ és az állapotvált. leírás

$$\underline{x}[k+1] = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}[k] + \underline{b}\,u[k]$$
$$y[k] = \underline{c}^T \underline{x}[k] + d\,u[k]$$

szinuszos állandósult állapot $\longrightarrow$

$$\longrightarrow \quad \underline{\bar{X}} e^{j\vartheta} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\bar{X}} + \underline{b}\,\bar{U} \;\rightarrow\; (e^{j\vartheta}\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})\underline{\bar{X}} = \underline{b}\,\bar{U}$$

$$\bar{Y} = \underline{c}^T \underline{\bar{X}} + d\bar{U} \;\leftarrow\; \underline{\bar{X}} = (e^{j\vartheta}\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{b}\,\bar{U}$$

$$Y = \underline{c}^T (e^{j\vartheta}\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{b}\,\bar{U} + d\bar{U}$$

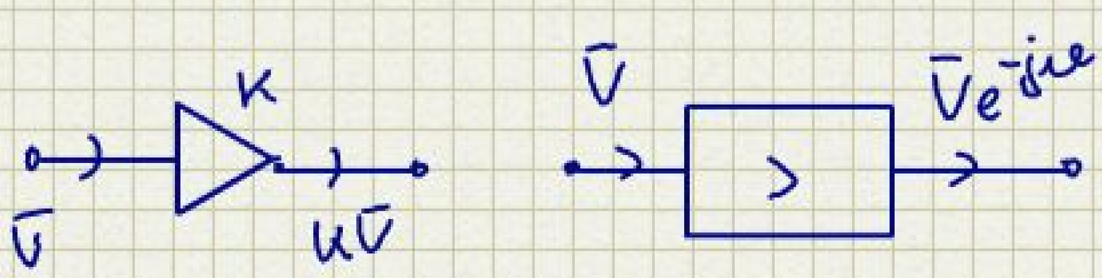
$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{\bar{Y}}{\bar{U}} = \underline{c}^T (e^{j\vartheta}\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{b} + d$$

5. $H(e^{j\vartheta}) \rightarrow$ hálózat

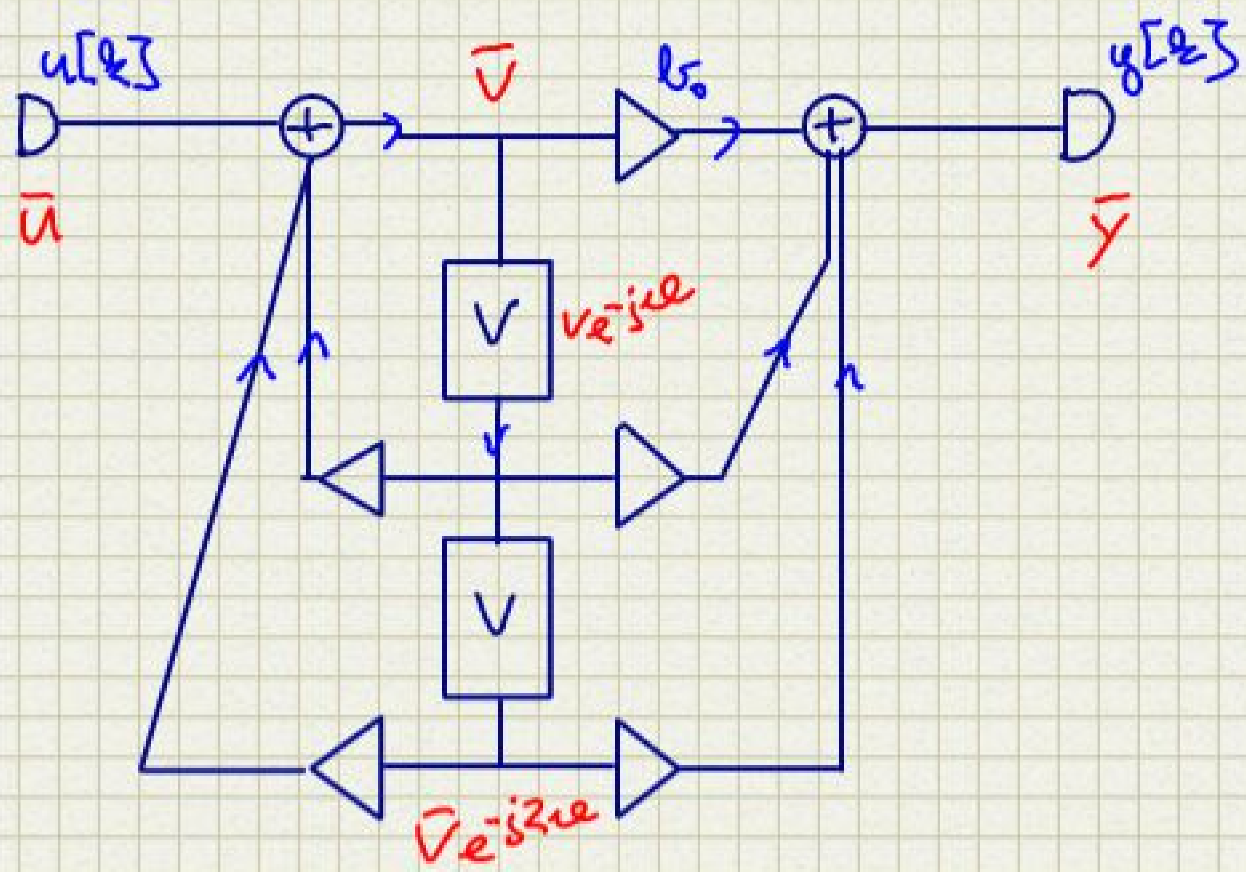
$H(e^{j\vartheta}) \rightsquigarrow$ rendszer egy. $\rightsquigarrow$ kanonikus hál.

a) közvetett: hál $\rightsquigarrow$ áll. egy $\rightsquigarrow$ $H(e^{j\vartheta})$
$\bar{U}$

b) közvetlen: trivi: $D \rightarrow o$ $\qquad$ $o \rightarrow D$ $\;\bar{Y}$



Példa:



$$\bar{V} = -a_1 \bar{V} e^{-j\vartheta} - a_2 \bar{V} e^{-j2\vartheta} + \bar{U}$$

$$\bar{V} = \frac{\bar{U}}{1 + a_1 e^{-j\vartheta} + a_2 e^{-j2\vartheta}}$$

$$\bar{Y} = b_0 \bar{V} + b_1 \bar{V} e^{-j\vartheta} + b_2 \bar{V} e^{-j2\vartheta} = \bar{V}\left(b_0 + b_1 e^{-j\vartheta} + b_2 e^{-j2\vartheta}\right)$$

7. $H(e^{j\vartheta})$ és $h[k]$

(ld. később)

8. Ábrázolás

minden információt tartalmaz

$$\left.\begin{matrix} K(\vartheta) \\ \varphi(\vartheta) \end{matrix}\right\} \vartheta \in [0, \pi] \ !$$

Periodikus állandósult állapot:

I. A DI. Periodikus jel

1. Def: $x[k+L] = x[k] \ \forall k$

   (min) L a periódus

2. Jellemzői:

   a. Középérték

   $$x_0 = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} x[k]$$

   b. Jelteljesítmény

   $$P_x = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} |x[k]|^2$$

   c. Effektív érték:

   $$X_{eff} = X_{RMS} = \sqrt{P_x}$$

II. Fourier-sor (DFS)

1. Komplex:

$$\boxed{x[k] = \sum_{p=0}^{L-1} X_p^c e^{jpk\Theta}, \quad \Theta = \frac{2\pi}{L}}$$

Θ: alapkörfrekvencia

$$\boxed{\bar{X}_p^c = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} x[k] e^{-jpk\Theta}, \quad p = 0, 1, \ldots, L-1}$$

- egzakt (nem közelítés)
- hasonlít az FFT-re
- $x[k]$ valós : $\Longleftrightarrow X_{L-p}^c = \left(X_p^c\right)^*$

2. Valós:

középérték (konstans)

$$x[k] = X_0 + \sum_{p=1}^{N} X_p \cos(p\Theta k + \varphi_p)$$

$$N = \begin{cases} \frac{L}{2} & \text{ha } L \text{ ps.} \\ \frac{L-1}{2} & \text{ha } L \text{ ptln.} \end{cases}$$

③ Példa:

$x[0]=0$

$x[1]=1 \qquad x[k+4]=x[k] \quad \forall k$

$x[2]=2$

$x[3]=-1$

$\rightarrow L=4 \longrightarrow \vartheta=\frac{2\pi}{L}=\frac{\pi}{2}$

$\boxed{p=0:}$ $\quad X_0=\frac{1}{4}(0+1+2-1)=0{,}5$

$\boxed{p=1:}$ $\quad X_1^c=\frac{1}{4}\left(0+1\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}+2\cdot e^{-j\pi}-1\cdot e^{-j\frac{3\pi}{2}}\right)=-0{,}5-j0{,}5=$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\frac{3\pi}{4}}$

$\boxed{p=2:}$ $\quad X_2^c=\frac{1}{4}\left(0+e^{-j\pi}+2\cdot e^{-j2\pi}-1e^{-j3\pi}\right)=0{,}5$

$\boxed{p=3:}$ $\quad X_3^c=\frac{1}{4}\left(0+1e^{-j\frac{3\pi}{2}}+2\cdot e^{-j\frac{6\pi}{2}}-1\cdot e^{-j\frac{9\pi}{2}}\right)=$

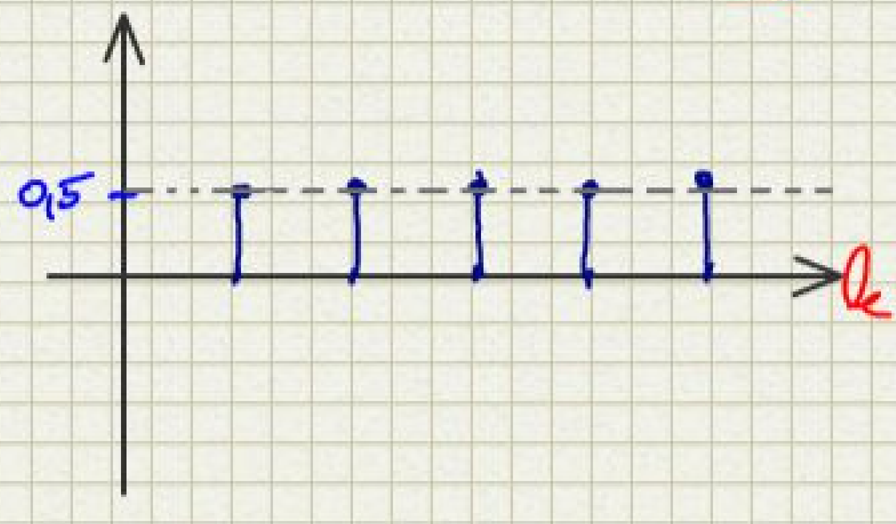
$=-0{,}5+j\cdot 0{,}5=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\frac{3\pi}{4}}=\left(X_1^c\right)^*$ ✓

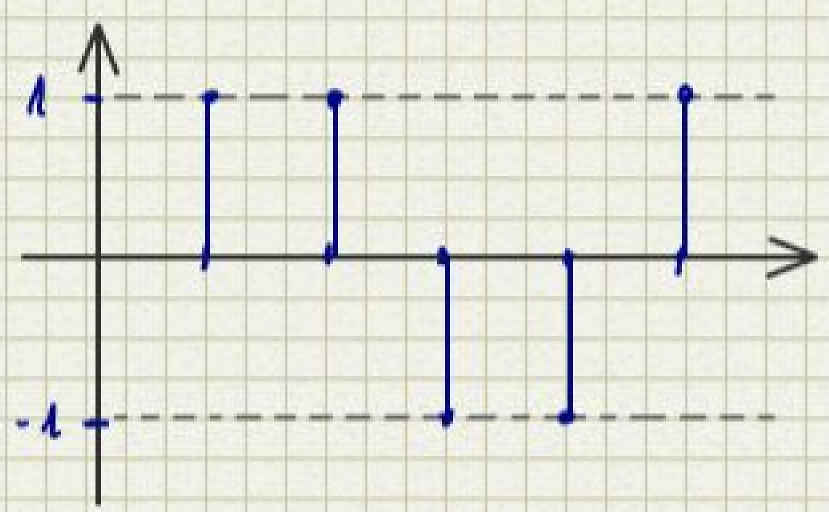
$$x[k]=0{,}5\cdot e^{j0}+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\frac{3\pi}{4}}\cdot e^{j\frac{\pi}{2}k}}+0{,}5\cdot e^{j\pi k}+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\frac{3\pi}{4}}\cdot e^{j\frac{3\pi}{2}k}}$$

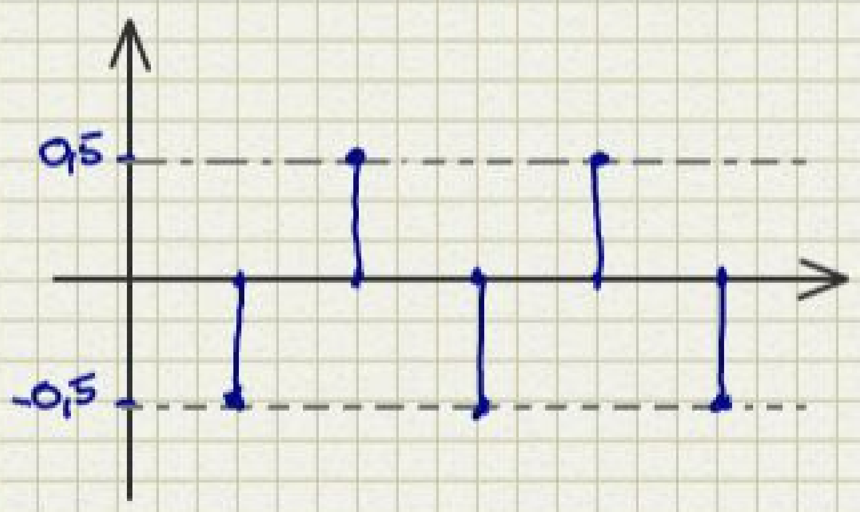
konjugált

pár

$$= 0{,}5 + \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}k - \frac{3\pi}{4}\right) + 0{,}5\,\underbrace{\cos(\pi k)}_{(-1)^k}$$







III. Válaszjel számítása:

$$u[k+L]=u[k],\ \forall k \xRightarrow{\text{lin}} y[k+L]=y[k],\ \forall k$$

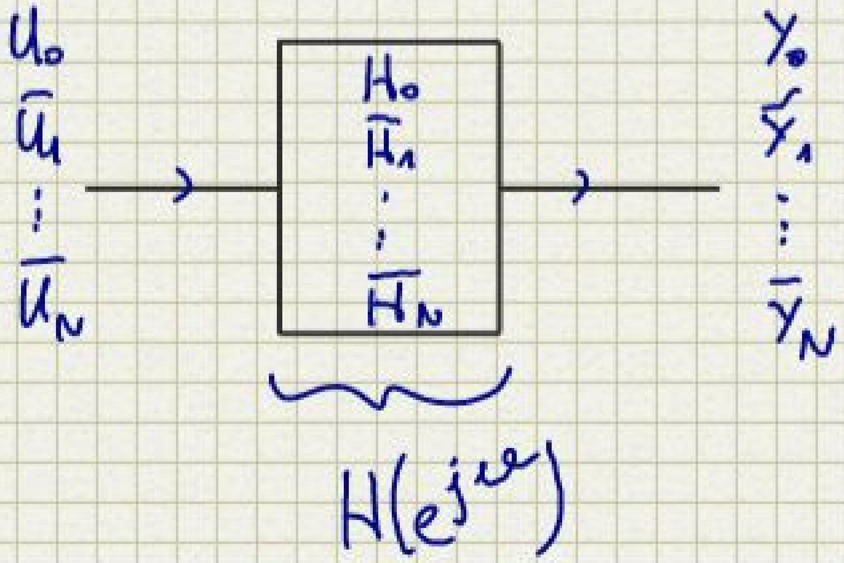
$$u[k]=U_0+\sum_{p=0}^{N} U_p\cos(p\Theta k+\rho_{up})$$

$$y[k]=Y_0+\sum_{p=0}^{N} Y_p\cos(p\Theta k+\rho_{yp})$$

$$\bar{U}_p=\begin{cases}U_0\ , & p=0\\ U_p e^{j\rho_{up}}\ , & p>0\end{cases}\qquad \bar{Y}_p=\begin{cases}Y_0\ , & p=0\\ Y_p e^{j\rho_{yp}}\ , & p>0\end{cases}$$

$$\bar{H}_p=H(e^{j\vartheta})\Big|_{\vartheta=p\Theta}$$

$$\boxed{\bar{Y}_p=\bar{H}_p\bar{U}_p}\qquad p=0\ldots N$$



DI jelek és rendszerek spektrális leírása:

I. DI Fourier-transzformáció

① Def.: $x[k] \to X(e^{j\vartheta}) = \mathcal{F}\{x[k]\}$

$$\boxed{x[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\vartheta})\, e^{j\vartheta k}\, d\vartheta} \qquad x[k] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\vartheta})\}$$

- ha $x[k]$ absz. össz.:

$$\boxed{X(e^{j\vartheta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, e^{-j\vartheta k}}$$

$x(\vartheta) = |X(e^{j\vartheta})|$ amplitúdóspektrum

$\varphi(\vartheta) = \operatorname{arc} X(e^{j\vartheta})$ fázisspektrum

② Tulajdonságok, tételek

a) $\mathcal{F}\{\}$, $\mathcal{F}^{-1}\{\}$ lineáris

b) Periodicitás: $X(e^{j(\vartheta+2\pi)}) = X(e^{j\vartheta})$

c.) Paritás:

$x[k]$ valós $\Leftrightarrow X(e^{-j\vartheta}) = X^*(e^{j\vartheta})$ → $X(-\vartheta) = X(\vartheta)$ páros ; → $\varphi(-\vartheta) = -\varphi(\vartheta)$ ptlan

$x[k]$ páros $\Leftrightarrow X(e^{j\vartheta})$ valós

$x[k]$ ptlan $\Leftrightarrow$ —"— képzetes

d) Eltolási tétel: $\mathcal{F}\{x[k-r]\} = e^{-jr\vartheta} \cdot X(e^{j\vartheta})$

e) Modulációs tétel: $\mathcal{F}\{x[k]e^{j\vartheta_0 k}\} = X(e^{j(\vartheta-\vartheta_0)})$

f) Konvolúciós tétel: $\mathcal{F}\{f[k] * g[k]\} = F(e^{j\vartheta}) \cdot G(e^{j\vartheta})$

h) Parseval tétele: $E_x \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2$ a jel „energiája"

Ha $E_x < \infty$, $E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\vartheta})|^2 d\vartheta$

③ Példák

a) $\mathcal{F}\{\delta[k]\} = 1$; $\mathcal{F}\{\delta[k-r]\} = e^{-jr\vartheta}$

b) $\mathcal{F}\{\varepsilon[k]q^k\} = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cdot e^{-j\vartheta k} = \sum_{k=0}^{\infty} (qe^{-j\vartheta})^k = \underline{\underline{\frac{1}{1-qe^{-j\vartheta}}}}$,

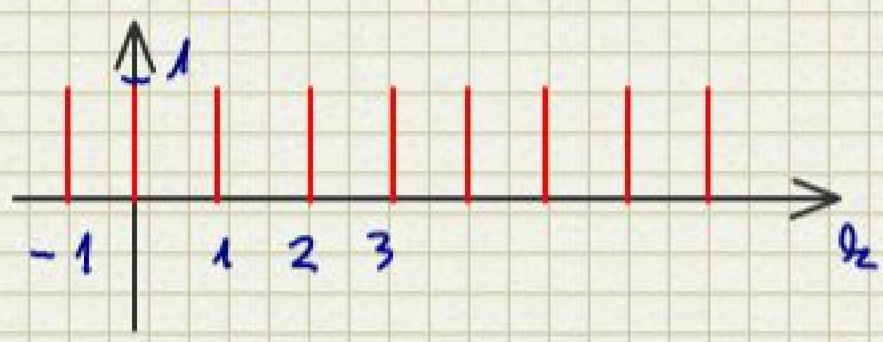
ha $|q| < 1$

c.) $\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\,\delta[\vartheta]$, $-\pi \le \vartheta \le \pi$ és periodikus $\longrightarrow$ mert

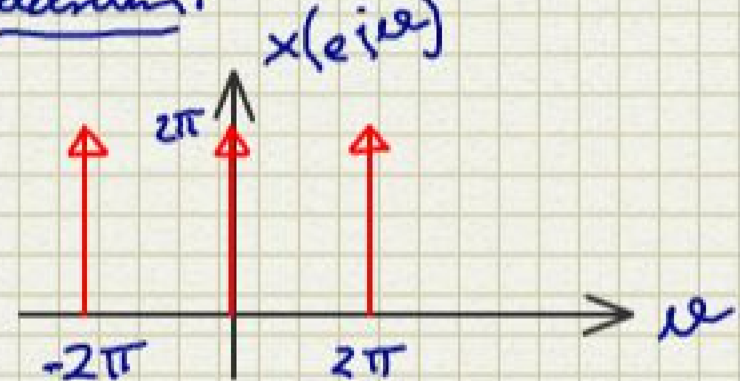
$$= \sum_{p=-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(\vartheta - p2\pi)$$

$$\frac{1}{\cancel{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} \cancel{2\pi}\,\delta(\vartheta)\,e^{j\vartheta k}\,d\vartheta = 1$$

időfüggvény:



spektrum:

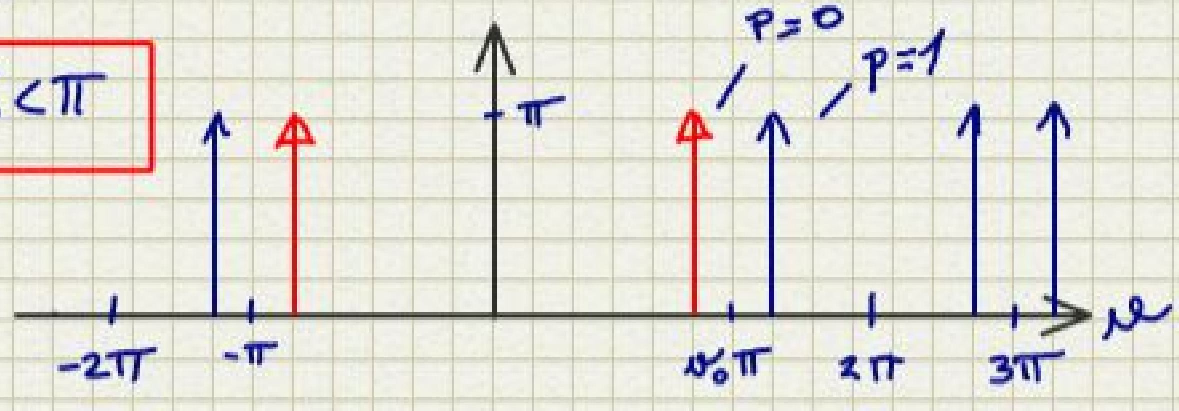


x	$\mathcal{F}\{x\}$
periodikus	„diszkrét"
diszkrét	periodikus

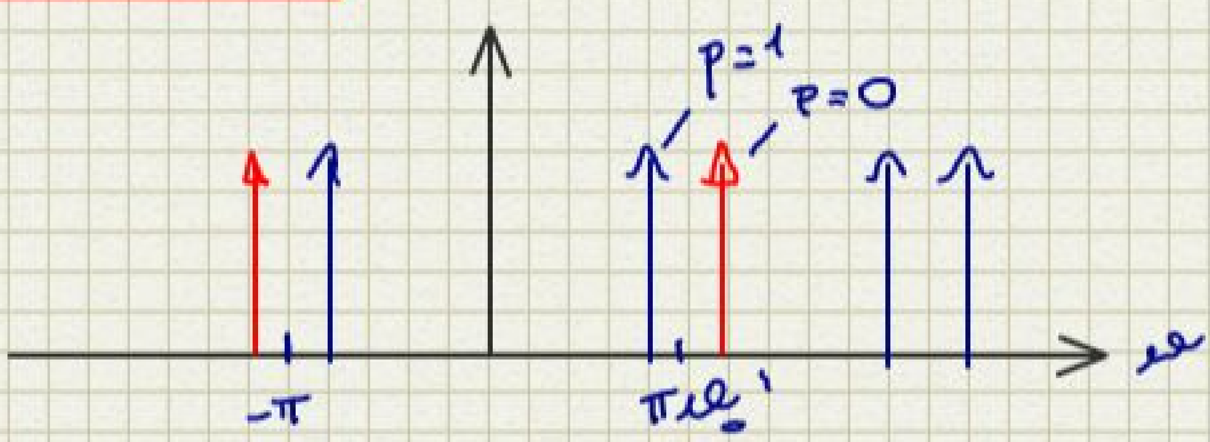
d.) $\mathcal{F}\{\cos(\vartheta_0 k)\} = \mathcal{F}\{\frac{1}{2}(1e^{j\vartheta_0 k} + 1e^{-j\vartheta_0 k})\} =$

$$= \pi \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[\delta(\vartheta - \vartheta_0 - p2\pi) + \delta(\vartheta + \vartheta_0 - p2\pi)\right]$$

$\boxed{\vartheta_0 < \pi}$



$\boxed{\vartheta_0' = 2\pi - \vartheta_0}$



1. mintavételezés!

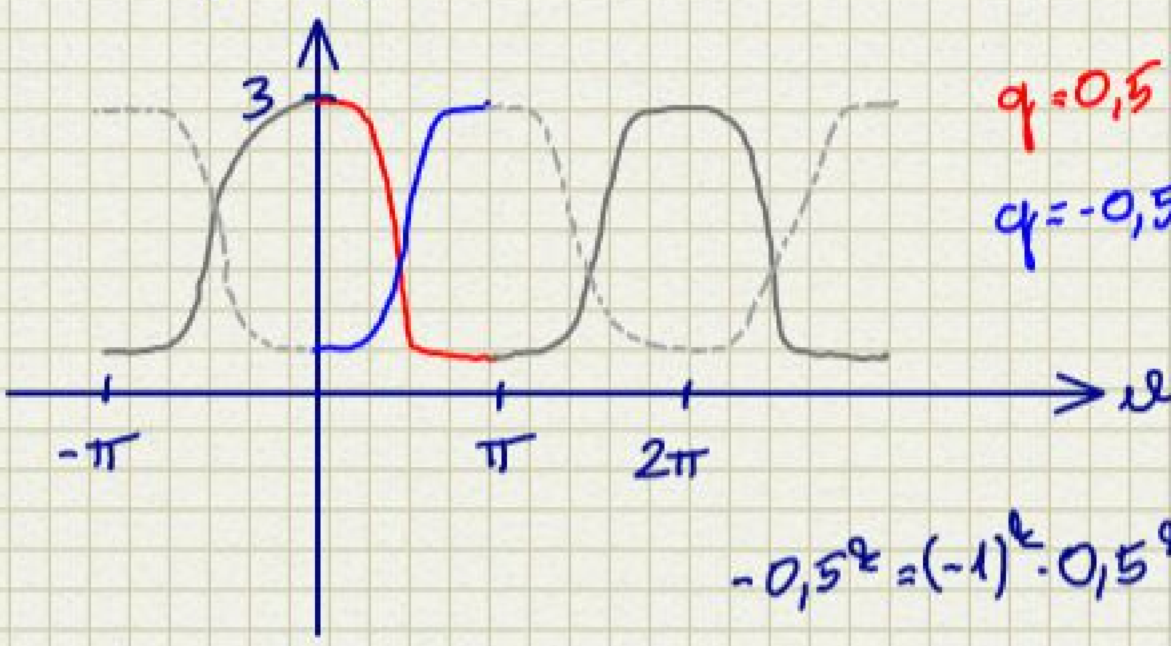
e) $x[k] = q^{|k|}$, $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$

$x[k] = \varepsilon[k] \cdot q^{k} + \varepsilon[-k] \cdot q^{-k} - \delta[k]$

csak le kell vonni a 0-ban lévőt (2x vettük)

$$X(e^{j\vartheta}) = \frac{1}{1-qe^{-j\vartheta}} + \frac{1}{1-qe^{j\vartheta}} - 1 =$$

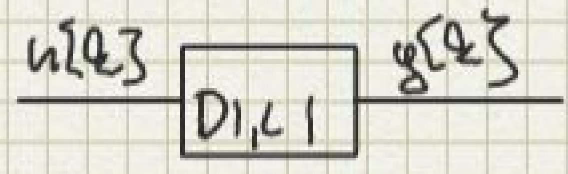
$$= \frac{1-q^2}{1+q^2-2q\cos\vartheta} \quad \text{(valós)}$$



$$-0{,}5^k = (-1)^k \cdot 0{,}5^k =$$

$$= \cos(\pi k) \cdot 0{,}5^k$$

II. Rendszeranalízis:



1. G-V kapcsolat:

$$u[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(e^{j\vartheta})\, e^{j\vartheta k}\, d\vartheta \rightarrow \underbrace{\frac{1}{2\pi} U(e^{j\vartheta})\, d\vartheta}_{\text{komplex amplitúdó}} \cdot e^{j\vartheta k}$$

„szinuszos jel"

$U(e^{j\vartheta})\, d\vartheta\, e^{j\vartheta k}$

$H(e^{j\vartheta}) \cdot U(e^{j\vartheta})\, d\vartheta \cdot e^{j\vartheta k}$

$$\Rightarrow y[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\vartheta})\cdot U(e^{j\vartheta})\, e^{j\vartheta k}\, d\vartheta$$

vesd össze: $$y[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\vartheta})\, e^{j\vartheta k}\, d\vartheta$$ $\Big\} =$

$$\Rightarrow y[k] = \mathcal{F}^{-1}\{H(e^{j\vartheta})\cdot \mathcal{F}\{u[k]\}\} = \mathcal{W}\{u[k]\}$$

2.) Impulzusválasz, átviteli kar.

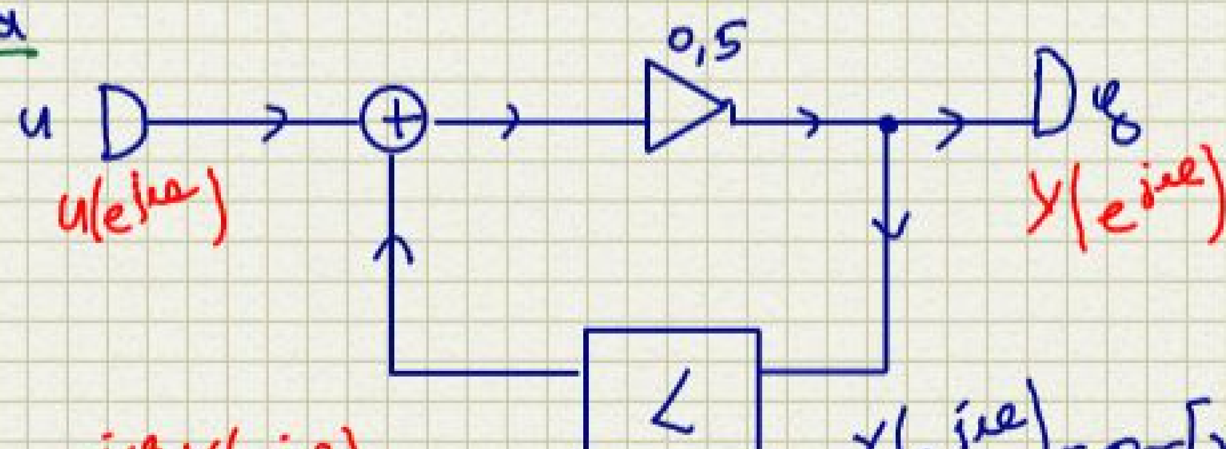
formálisan: $H(e^{j\vartheta}) = \dfrac{Y(e^{j\vartheta})}{U(e^{j\vartheta})}$

ha $u[k] = \delta[k] \Rightarrow U(e^{j\vartheta}) = 1$

$h[k] = y[k] = \mathcal{F}^{-1}\{H(e^{j\vartheta})\} \Rightarrow H(e^{j\vartheta}) = \boxed{\mathcal{F}\{h[k]\}}$, ha

$h[k]$ absz. int. (G-V stabilis)

3.) Példa



$e^{-j\vartheta}Y(e^{j\vartheta})$

$$Y(e^{j\vartheta}) = 0{,}5\left[Y(e^{j\vartheta})\cdot e^{-j\vartheta} + U(e^{j\vartheta})\right]$$

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{Y(e^{j\vartheta})}{U(e^{j\vartheta})} = \frac{0{,}5}{1-0{,}5e^{-j\vartheta}}$$

$$h[k] = \mathcal{F}^{-1}\{H(e^{j\vartheta})\} = \varepsilon[k]\cdot 0{,}5\cdot(0{,}5)^k$$

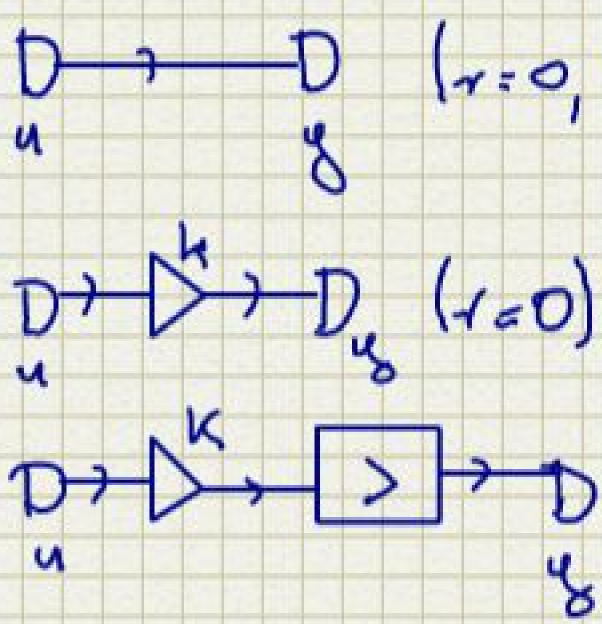
4.) Alakhű jelátvitel:

df: $y[k] = K \cdot u[k-r]$ / $\mathcal{F}$

$$Y(e^{j\vartheta}) = K \cdot e^{-jr\vartheta} \cdot U(e^{j\vartheta})$$

$$\Rightarrow H(e^{j\vartheta}) = K \cdot e^{-jr\vartheta}$$

realizáció:



$(r=0,\ K=1)$

$(r=0)$

$(r=1)$

DI Rendszerek analízise a komplex frekvenciatartományban:

I. A z-transzformáció (Laplace)

1. Alapgondolat: $\mathcal{F}\{x[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot e^{-j\vartheta k}$

feltéve, hogy $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]| < \infty$

$\rightarrow y[k] = \varepsilon[k]\cdot x[k]\cdot r^{-k}$ absz. össz., ha r „elég nagy”

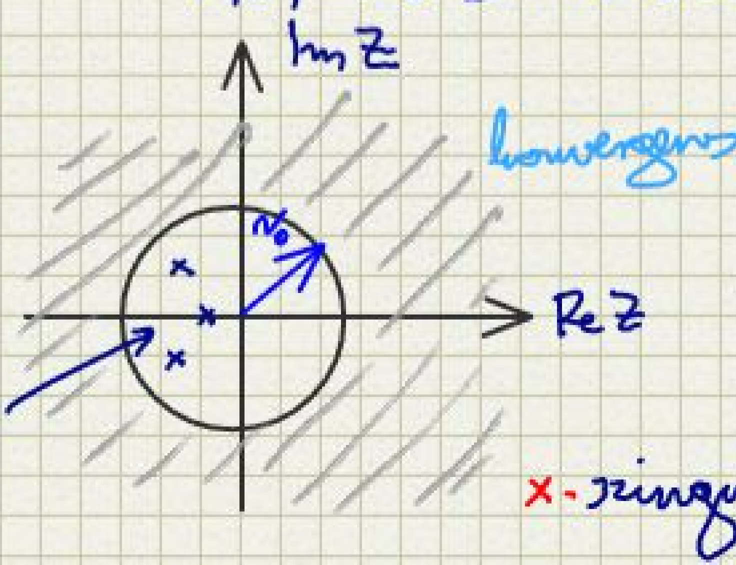
$$\mathcal{F}\{y[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]\cdot r^{-k}\cdot e^{-j\vartheta k} = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]\underbrace{(r\cdot e^{j\vartheta})}_{z}{}^{-k}$$

2. Def.:

$$\boxed{X(z) = \mathcal{Z}\{x[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]\cdot z^{-k}}$$

$$X(z) = x[0] + x[1]z^{-1} + \dots$$

konvergencia:



konvergens

kiegészített tartomány

x - szinguláris

3.) Inverz

$$Z^{-1}\{X(z)\} = \begin{cases} x[k], & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

$$Z^{-1}\{X(z)\} = \varepsilon[k] \cdot x[k]$$

$$\mathcal{F}\{\varepsilon[k]x[k]r^{-k}\} = \sum_{k=0}^{\infty} x[k](re^{j\vartheta})^{k} = X(z)\Big|_{z=re^{j\vartheta}}$$

$$\varepsilon[k]x[k] = \mathcal{F}^{-1}\{X(z)\Big|_{z=re^{j\vartheta}}\}r^{k} = r^{k}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(z)\Big|_{z=re^{j\vartheta}}$$

$$z = r \cdot e^{j\vartheta}$$

$$\frac{dz}{d\vartheta} = re^{j\vartheta} = jz$$

$$d\vartheta = \frac{1}{jz}dz$$

$$\varepsilon[k] \cdot x[k] = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z) \cdot z^{k-1}dz$$

4.) Példák:

a) $\mathcal{Z}\{\delta[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[k] \cdot z^{-k} = 1$

b) $\mathcal{Z}\{\varepsilon[k] q^k\} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (q z^{-1})^k = \frac{1}{1 - q z^{-1}} = \underline{\underline{\frac{z}{z-q}}}$

konvergens: $|q z^{-1}| < 1 \longrightarrow |z| > |q|$

kiterjeszthető: $|z| \leq |q|$ kivéve: $z = q$ (szingularitás)

c) $\mathcal{Z}\{\varepsilon[k]\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$

5.) Tételek:

a) $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}^{-1}$ lineáris

b) Csillapítási tétel: $\mathcal{Z}\{q^k x[k]\} = X\left(\frac{z}{q}\right)$

c) Eltolási tételek:

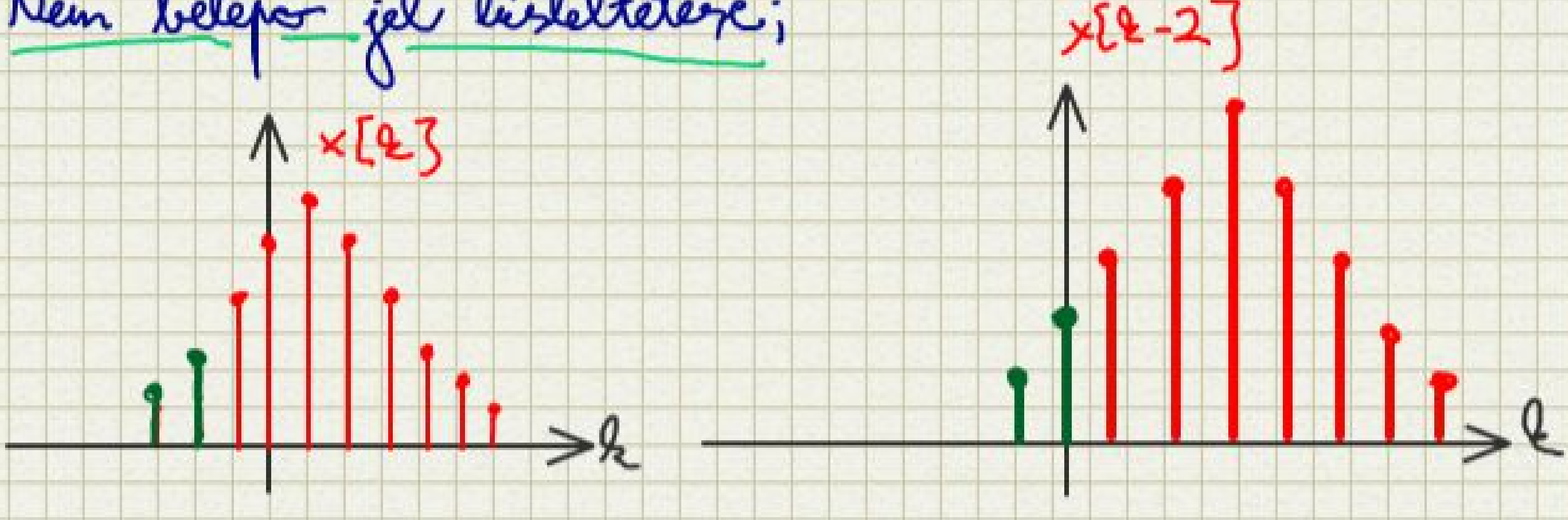
- Belépő jel késleltetése:

$$\mathcal{Z}\{\varepsilon[k-r]\, x[k-r]\} =$$

$$= \sum_{k=r}^{\infty} x[k-r]\, z^{-k} \overset{i=k-r}{=} \sum_{i=0}^{\infty} x[i]\, z^{-i} \cdot z^{-r} =$$

$$= z^{-r} \sum_{i=0}^{\infty} x[i] z^{-i} = z^{-r} X(z)$$

- Nem belépő jel késleltetése:



$$\varepsilon[k]x[k-2] = \varepsilon[k-2]x[k-2] + x[-2]\delta[k] + x[-1]\delta[k-1]$$

$$Z\{x[k-2]\} = z^{-2}X(z) + x[-2] + x[-1]z^{-1}$$

$$Z\{x[k-r]\} = z^{-r}X(z) + \sum_{i=1}^{r} x[-i] z^{-(r-i)}$$

- Egyetlen ütemmel siettetett jel:

$$\begin{cases} v[k] = \varepsilon[k]x[k+1] \\ v[k-1] = \varepsilon[k-1]x[k] = \varepsilon[k]x[k] - x[0]\delta[k] \\ z^{-1}V(z) = X(z) - x[0] \end{cases}$$

$$\underline{Z\{x[k+1]\} = zX(z) - z\,x[0]}$$

d.) Paraméter-tétel

$$x[k] = x(q)[k] \qquad \text{pl: } x[k] = \varepsilon[k]q^k \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathcal{Z}\left\{\frac{\partial x[k]}{\partial q}\right\} = \frac{\partial}{\partial q} X(z)$$

$$\text{pl: } \frac{\partial}{\partial q} q^k = k\, q^{k-1} \longrightarrow \mathcal{Z}\{k \cdot q^{k-1}\} =$$

$$= \mathcal{Z}\left\{\frac{\partial}{\partial q} q^k\right\} = \frac{\partial}{\partial q}\mathcal{Z}\{q^k\} = \frac{\partial}{\partial q}\,\frac{1}{1-qz^{-1}} = \frac{0-(-z^{-1})}{(1-qz^{-1})^2}$$

$$\mathcal{Z}\{k\, q^k\} = \frac{qz^{-1}}{(1-qz^{-1})^2} = \underline{\frac{qz}{(z-q)^2}}$$ (1. többszörös gyökök)

e.) Kezdeti és végérték tétel:

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)\,; \qquad \lim_{k\to\infty} x[k] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$$

f.) Konvolúció tétel:

$$\mathcal{Z}\{f[k] * g[k]\} = F(z)\cdot G(z),$$ ha f és g belépő!

g.) $\mathcal{F}$ és $\mathcal{Z}$ kapcsolata:

$$\mathcal{F}\{x[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\vartheta k}$$, ha $x[k]$ absz. össz.

$$\mathcal{Z}\{x[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \cdot z^{-k}$$

$$X(z) = X(e^{j\vartheta})\Big|_{z=e^{j\vartheta}}$$, ha $x[k]$ absz. össz. és belépő

ellenpélda: $\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(\vartheta) \leftrightarrow \mathcal{Z}\{1\} =$

$$= \mathcal{Z}\{\varepsilon[k]\} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

II. Inverz transzformáció:

1.) Polinomosztással:

$$X(z) = \frac{R(z)}{Q(z)} \quad \text{(rac. tf.)}$$

$$X(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \ldots$$

$$x[k] = c_0 \delta[k] + c_1 \delta[k-1] + c_2 \delta[k-2] + \ldots$$

$$\begin{cases} x[0] = c_0 \\ x[1] = c_1 \\ x[2] = c_2 \\ \vdots \end{cases}$$

2.) Részlettörtre bontás

$$X(z) = \frac{R(z)}{Q(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_{n-1} z + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n} =$$

$$= \frac{R(z)}{(z-q_1)(z-q_2)\ldots(z-q_n)} = c_0 + \frac{c_1}{z-q_1} + \ldots + \frac{c_n}{z-q_n} =$$

$$= c_0 + z^{-1} \frac{c_1 z}{z-q_1} + z^{-1} \frac{c_2 z}{z-q_2} + \ldots + z^{-1} \frac{c_n z}{z-q_n}$$

$$x[k] = C_0 \delta[k] + \varepsilon[k-1]\{C_1 q_1^{k-1} + C_2 q_2^{k-2} + \dots + C_n q_n^{k-n}\}$$

$$C_0 = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

$$C_i = \lim_{z\to q_i} \frac{R(z)}{Q(z)/(z-q_i)}$$

III. Átviteli függvény:

1.) Def.: $\boxed{Y(z) = H(z)U(z)} \longrightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$

2.) G-V kapcs.:

$$y[k] = Z^{-1}\{H(z)\cdot Z\{u[k]\}\}$$, ha $u[k]$ belépő.

3.) Impulzusválasz:

$$u[k] = \delta[k] \longrightarrow U(z) = 1 \Rightarrow y[k] \equiv h[k] =$$

$$= Z^{-1}\{H(z)\} \Rightarrow \boxed{H(z) = Z\{h[k]\}}$$

4.) Ábrázolás:

pólus - zérus (z szerint)

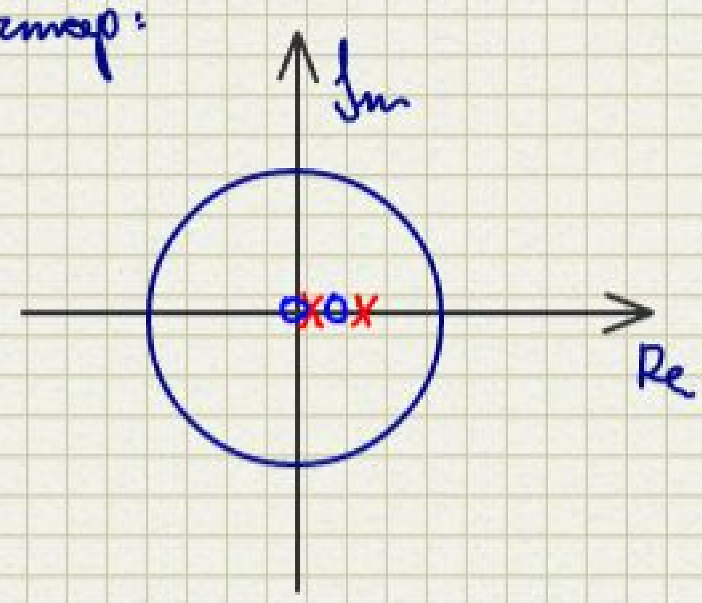
pl: $H(z) = \dfrac{-4+z^{-1}}{1-0{,}6z^{-1}+0{,}05z^{-2}} = \dfrac{-4z^2+z}{z^2-0{,}6z+0{,}05} =$

$$= -4\,\frac{(z-0)(z-0{,}25)}{(z-0{,}5)(z-0{,}1)}$$

$r_1 = 0 \qquad r_2 = 0{,}25$

$q_1 = 0{,}5 \qquad q_2 = 0{,}1$

pzmap:



5.) G-V stabilitás $\Longleftrightarrow$ $h[k]$ absz. össz.

$$h[k] = B_0\,\delta[k] + B_0\,\delta[k-1] + \ldots + B_r\,\delta[k-r] +$$
$$+\,\varepsilon[k-r]\left(C_1 q_1^{k-r} + C_2 q_2^{k-r} + \ldots + C_n q_n^{k-n}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sim \Longleftrightarrow \boxed{|q_i|<1,\ i=1,\ldots,n}$$

IV.) DI rendszerjellemző fgv-ek:

1.) Impulzusválasz $h[k]$ (LI-rendsz.)

$$y[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[i] \cdot u[k-i]$$

G-V stab. $\Leftrightarrow$ $h[k]$ absz. össz.

kauzalitás $\Longleftrightarrow$ $h[k]$ belépő

2.) Átviteli karakt. $H(e^{j\vartheta})$ (LI, GV-stab)

$$y[k] = \mathcal{F}^{-1}\{H(e^{j\vartheta})\,\mathcal{F}\{u[k]\}\}, \quad u[k] \text{ absz. össz.}$$

kauzalitás $\Longleftarrow$ $n \geq m$

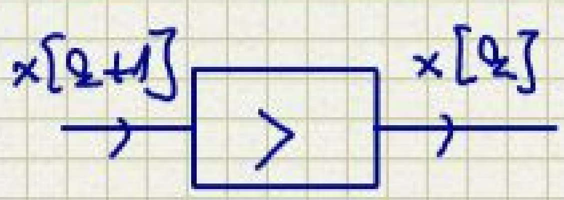
3.) Átviteli fgv. - $H(z)$ (LI, kauzális)

$$y[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z) \cdot \mathcal{Z}\{u[k]\}\}, \text{ ha } u[k] \text{ belépő}$$

G-V stab. $\Longleftrightarrow$ $|q_i| < 1 \quad i = 1, \dots, n$

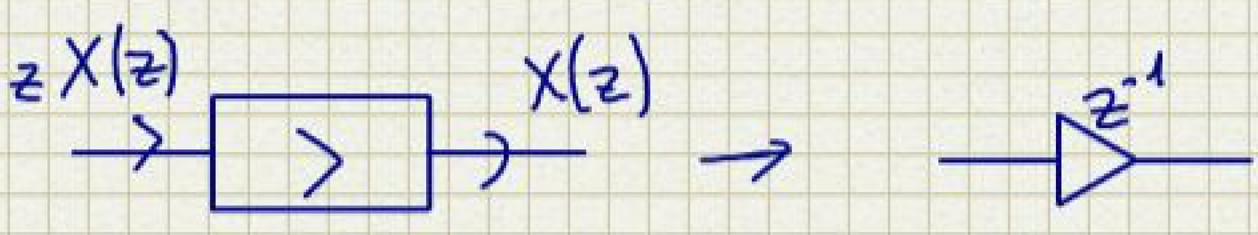
$$\begin{tikzcd}
 & h[k] \arrow[dl, leftrightarrow, "\mathcal{F}"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "\mathcal{Z}"] & \\
H(e^{j\vartheta}) \arrow[rr, leftrightarrow, bend right, "z = e^{j\vartheta}"'] & & H(z)
\end{tikzcd}$$

V.) Hálózatanalízis Z tartományban



$$\mathcal{Z}\{x[k+1]\} = zX(z) - z\,x[0]$$

1.) Ha $u[k]$ belépő $\Rightarrow x[0] = 0$



2.) Ha $u[k]$ nem belépő

$$\mathcal{Z}\{x[k]\} = z^{-1}\,\mathcal{Z}\{x[k+1]\} + x[0]$$

vagy

$$z \cdot \mathcal{Z}\{x[k]\} = \mathcal{Z}\{x[k+1]\} + z\,x[0]$$

fotó bef!

VI. Az állapotegyenletek transzformálása

$$x[k+1] = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}[k] + \underline{b}\,u[k] \quad \xrightarrow{Z}$$

$$y[k] = \underline{c}^T \underline{x}[k] + d\,u[k]$$

$$\xrightarrow{Z} \quad z\,\underline{X}(z) - z\,\underline{x}[0] = \underline{\underline{A}}\,\underline{X}(z) + \underline{b}\,U(z)$$

$$Y(z) = \underline{c}^T \underline{X}(z) + d\,U(z)$$

$$\boxed{Y(z) = \left\{ \underline{c}^T \left(z\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right)^{-1} \underline{b} + d \right\} U(z) + \underline{c}^T \left(z\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right)^{-1} z\,\underline{x}[0]}$$

① Átviteli függvény: $h[k] = y[k]$, ha $u[k] = \delta[k]$,

$$h[k] = Z^{-1}\{H(z)\}$$

$$U(z) = 1, \quad \underline{x}[0] = 0$$

$$\boxed{H(z) = \underline{c}^T \left(z\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right)^{-1} \underline{b} + d}$$

② Redukált átv. fgv.:

pl: $x_1[k+1] = 0{,}6\,x_1[k] - 0{,}224\,x_2[k] + u[k]$

$x_2[k+1] = 0{,}224\,x_1[k]$

$y[k] = -7{,}6\,x_1[k] + 17\,x_2[k] + 4u[k]$

$\det(\lambda\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}) = 0$

$\lambda_1 = 0{,}5$

$\lambda_2 = 0{,}1$

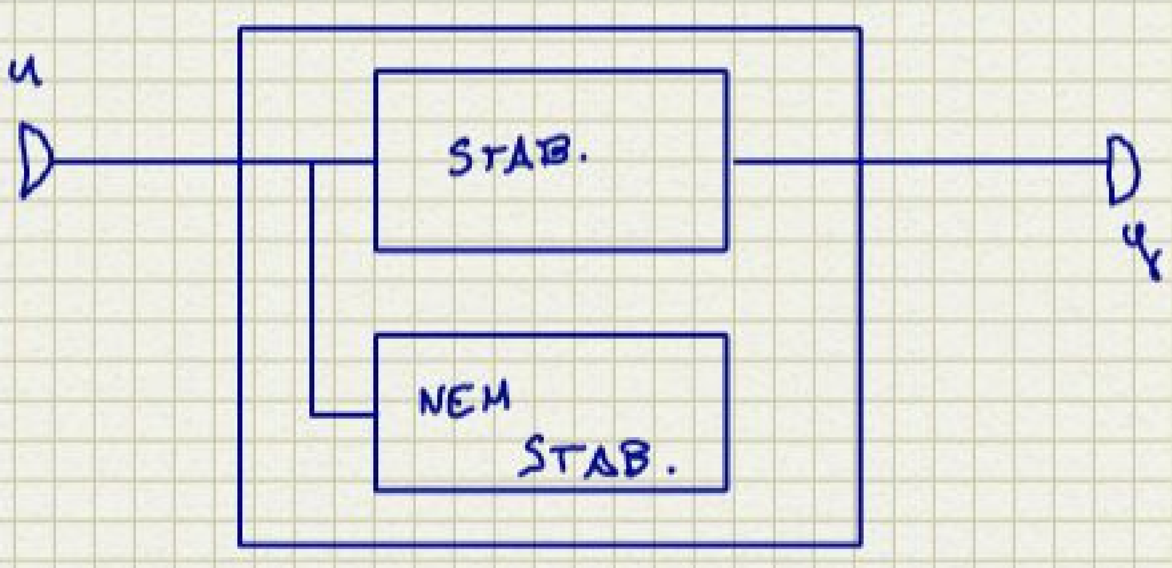
$$H(z)=\frac{4z^2-10z+4}{z^2-0,6z+0,05}=4\frac{(z-2)\cancel{(z-0,5)}}{\cancel{(z-0,5)}(z-0,1)}$$

$$\overset{*}{H}(z)=\frac{4z-8}{z-0,1} \longrightarrow q_1=0,1$$

$$\{\underset{\text{pólus}}{q_i}, i=1,\dots,n\} \subseteq \{\underset{\text{sajátérték}}{\lambda_j}, j=1,\dots,N\}$$

$$n \le N$$

G-V stab. $\Longleftarrow$ aszimpt. stab.



VII Spec. tul. rendszerek.

1. FIR:

$$h[k] = c_0\delta[k] + c_1\delta[k-1] + \ldots + c_{L-1}\delta[k-L]$$

azaz $h[k]=0,\ k \geq L$

$$H(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + \ldots + c_{L-1} z^{-(L-1)} =$$

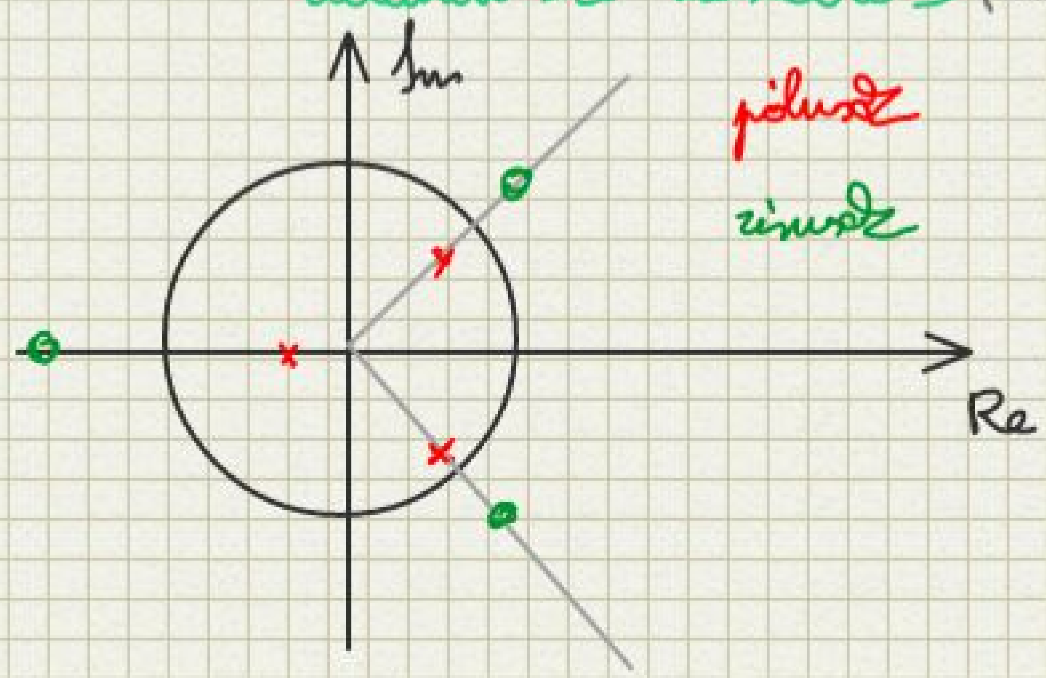
$$= \frac{c_0 z^{L-1} + c_1 z^{L-2} + \ldots + c_{L-1}}{z^{L-1}} \Rightarrow \text{MINDIG G-V stabilis}$$

2. Mindentáteresztő

Df: $K(\vartheta) = |H(e^{j\vartheta})| = K_0$ (konst.)

$$H(z) = \underbrace{K_A z^{-r}}_{\text{állandó} \,*\, z^{-r} \text{ késleltetés}} \frac{\left(z - \frac{1}{q_1^*}\right)\ldots\left(z - \frac{1}{q_n^*}\right)}{(z-q_1)\ldots(z-q_n)}$$ ahol r tetszőleges.

(ideális jelátvitel)



3. Minimálfázisú

$$H(z) = K\,\frac{(z-r_1)\ \dots\ (z-r_m)}{(z-q_1)\dots\ (z-q_n)}\ ,\quad m \le n$$

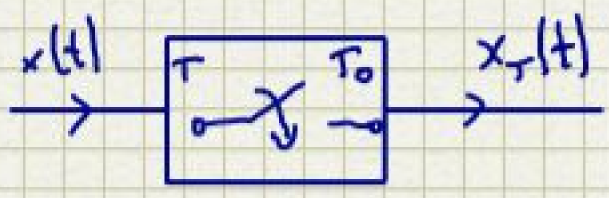
$|q_i| < 1\ ,\ i = 1, \dots, n \quad$ (G-U stab.)

$|r_j| < 1 \quad j = 1 \dots m$

MINTAVÉTELEZÉS ÉS JELREKONSTRUKCIÓ

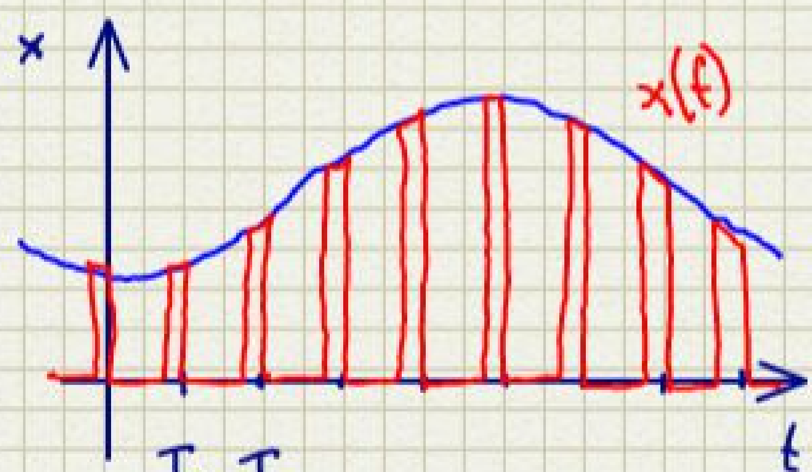
I. MV időtartományban

1. FI reprezentáció



$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & kT < t < kT + T_0 \\ 0 & \end{cases} =$$

$$= x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \varepsilon(t - kT) - \varepsilon(t - T_0 - kT) \right\}$$



T - mintavételi periódus (idő)

T_0 - m.v. idő

$f_s = \frac{1}{T}$, $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$

- mintavételi (kör) frekvencia

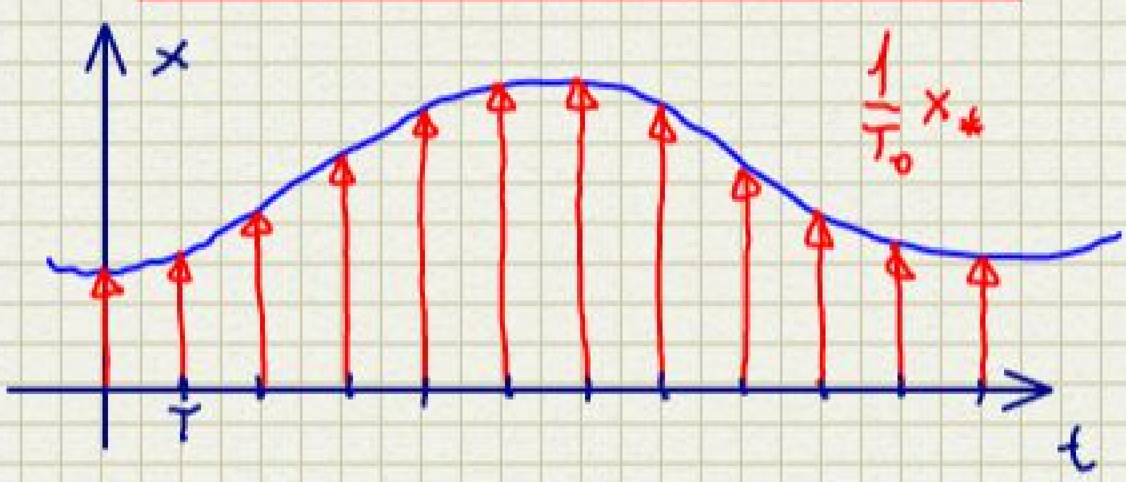
„órajel frekv.”

② Egyszerűsített F.I. reprezentáció – „csillagozott jel"

$$\frac{1}{T}\left\{\varepsilon(t-kT)-\varepsilon(t-T_0-kT)\right\} \underset{T_0 \ll T}{\approx} \varepsilon'(t-kT)=\delta(t-kT)$$

$$x_T(t) \cong T_0\, x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = x_*(t) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{x_*(t) = T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\,\delta(t-kT)}$$



③ A DI reprezentáció

$$\boxed{x_D[k] = x(kT)}$$

$$x_*(t) = T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k]\,\delta(t-kT) \Rightarrow x_* \text{ és } x_D \text{ ekvivalens}$$

4. Példa: $x(t) = \varepsilon(t)\, e^{-\alpha t}$, T és T_0 adott

$$x_D[k] = \varepsilon(kT+0)\, e^{-\alpha k T} = \varepsilon[k]\, a^k, \quad a = e^{-\alpha T}$$

$$x_*(t) = T_0 \sum_{k=0}^{\infty} a^k \delta(t - kT)$$

II. Mv. a frekvenciatartományban

Efh: $x(t)$ absz. int. és folyt.

$\Downarrow$

$x_D[k]$ absz. össz.

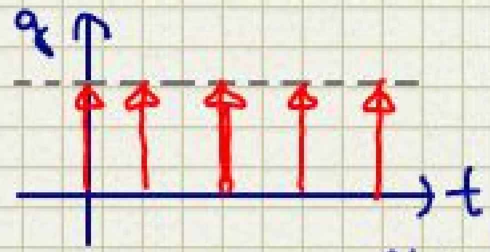
1. $X_D(e^{j\vartheta})$ és $X(j\omega)$ kapcsolata

$$X_D(e^{j\vartheta}) \equiv \mathcal{F}\{x_D[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\, e^{-j\vartheta k} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\}\Big|_{t=kT} \cdot e^{-j\vartheta k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega k T}\, d\omega \right\} \cdot$$

$$\cdot\, e^{-j\vartheta k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \underbrace{\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j(\omega T - \vartheta)k} \right\}}_{?} d\omega$$

kitérő: legyen $g(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_1)$



„Dirac-fésű"

Fourier-sora:

$$\overline{G}_m=\frac{1}{T_1}\int\limits_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}\delta(t)e^{-jm\frac{2\pi}{T_1}t}\,dt=\frac{1}{T_1}\qquad m=0,\pm1,\pm2,\dots$$

$$g(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T_1}e^{jm\frac{2\pi}{T_1}t}$$

$$\longrightarrow\ \sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{jm\frac{2\pi}{T_1}t}=T_1\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_1)$$

$$\left|\begin{array}{l} T_1\leftarrow 2\pi\\ t\leftarrow \omega T-\vartheta\\ m\leftarrow \ell\\ n\leftarrow p\end{array}\right.$$

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}e^{j(\omega T-\vartheta)\ell}=2\pi\sum_{p=-\infty}^{\infty}\delta(\omega T-\vartheta-p2\pi)$$

$$X_D(e^{j\vartheta})=\frac{1}{\cancel{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)\cdot\cancel{2\pi}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\delta(\omega T-\vartheta-p2\pi)=$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\,\delta(\omega T - \vartheta - p2\pi)\,d\omega$$

$$\omega T - \vartheta - p2\pi = 0$$

$$\omega = \frac{\vartheta}{T} + p\frac{2\pi}{T} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega T)\,d\omega = \frac{1}{T}$$

② $X_D(e^{j\vartheta})$ és $X_*(j\omega)$ kapcsolata

$$X_*(j\omega) \equiv \mathcal{F}\{x_*(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k]\,\delta(t-kT)\,e^{-j\omega t}\,dt =$$

$$= T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k] \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)\,e^{-j\omega t}\,dt = T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k]\,e^{-j\omega kT}$$

$$X_D(e^{j\vartheta}) \equiv \mathcal{F}\{x_D[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k]\,e^{-j\vartheta k} \rightarrow$$

$$\rightarrow X_*(j\omega) = T_0\,X_D(e^{j\vartheta})\Big|_{\vartheta = \omega T}$$

③ $X_*(j\omega)$ és $X(j\omega)$ kapcs. – a m.v. jel spektruma

① és ② alapján

$$\boxed{X_*(j\omega) = \frac{T_0}{T} \sum X(j(\omega + p\,\omega_s))} \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

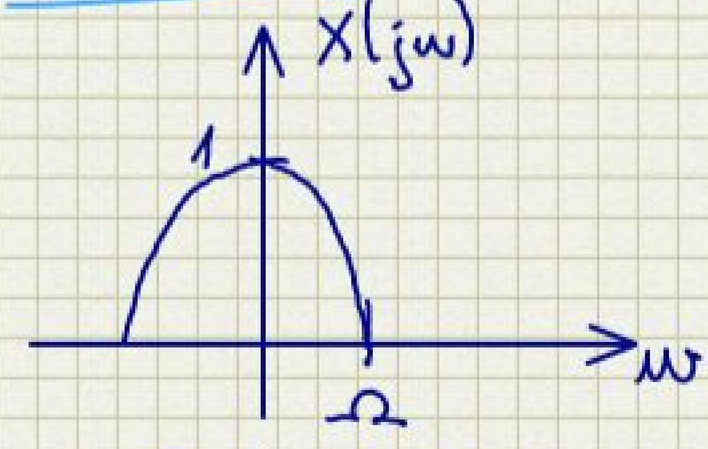
III A mintavételi tétel

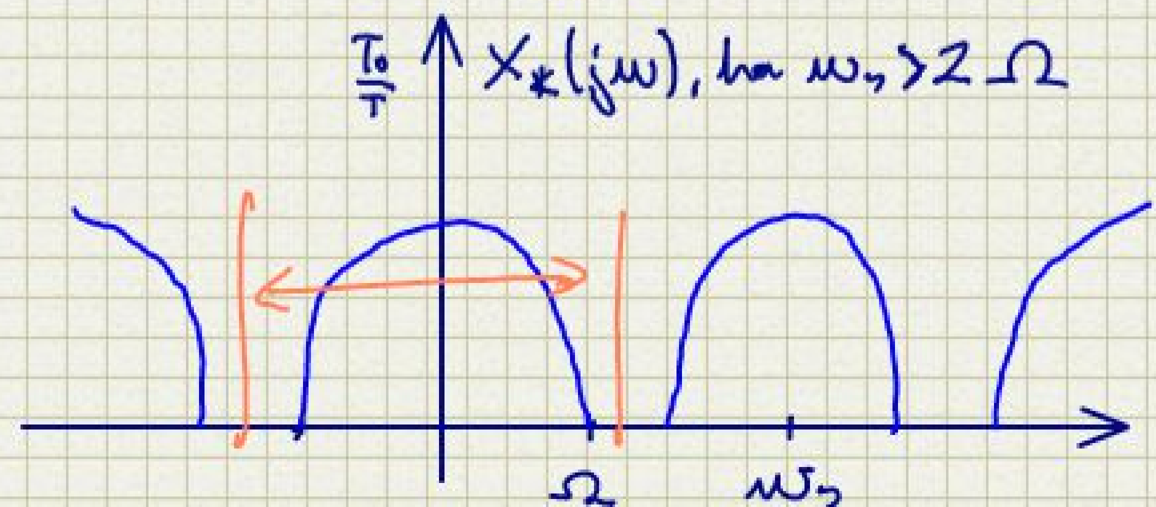
① (Shanon, Nyquist)

a jel rekonstruálható mintáiból $\Longleftrightarrow$ ha sávkorlátozott, és Ω a sávkorlát

$$\boxed{\begin{array}{l} T \le \frac{\pi}{\Omega} \\ \omega_s \ge 2\Omega \\ f_s \ge \frac{\Omega}{\pi} = f_N \end{array}}$$ Nyquist

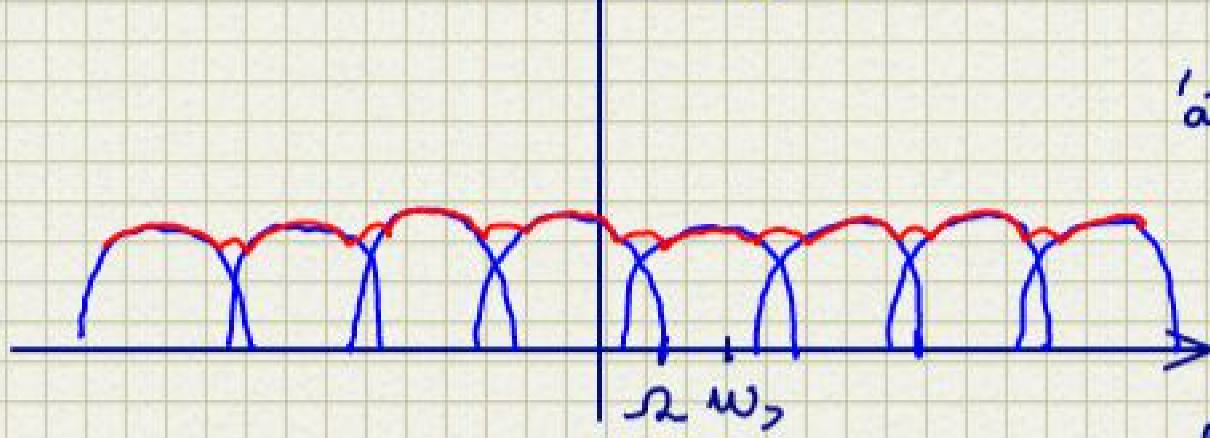
szemléltetés:





nem lapolódik át

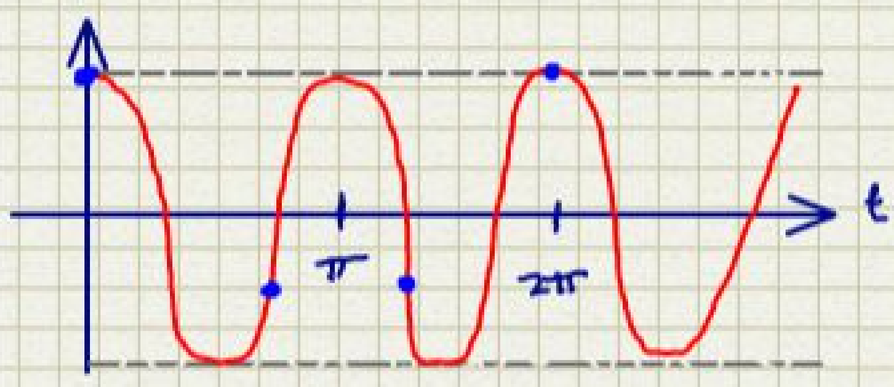
$X_*(j\omega)$, ha $\omega_s < 2\Omega$

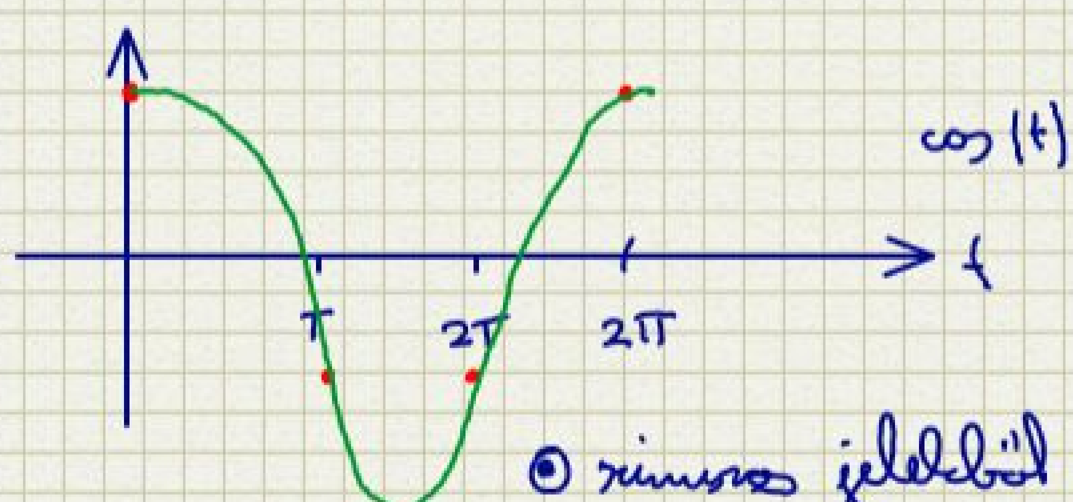


átlapolódás
↓
ha nem sávkorlátozott

(2) Alulmintavételezés hatása (aliasing)

pl: $x(t) = \cos(2t)$

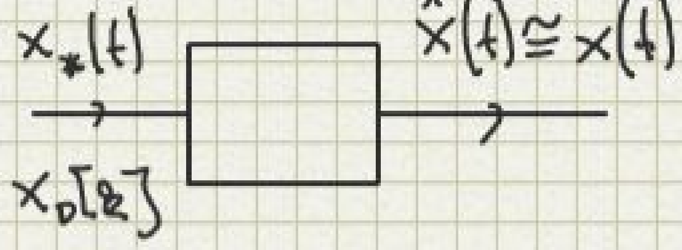




⊙ szinuszos jelekből periódusonként legalább 2 mintát kell venni, hogy rekonstruálható legyen.

IV. Jelrekonstrukció:

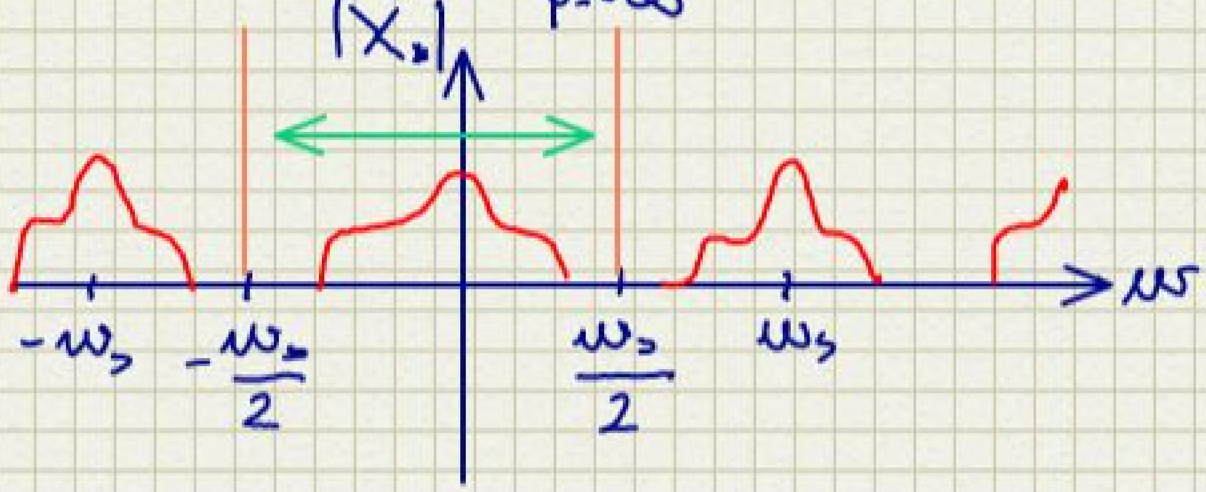
1. Feladat:

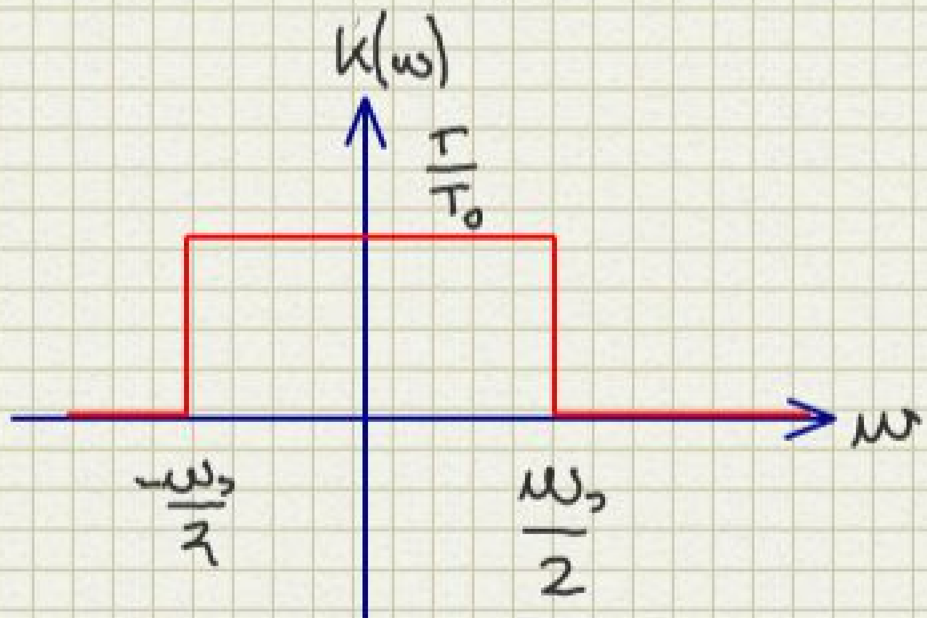


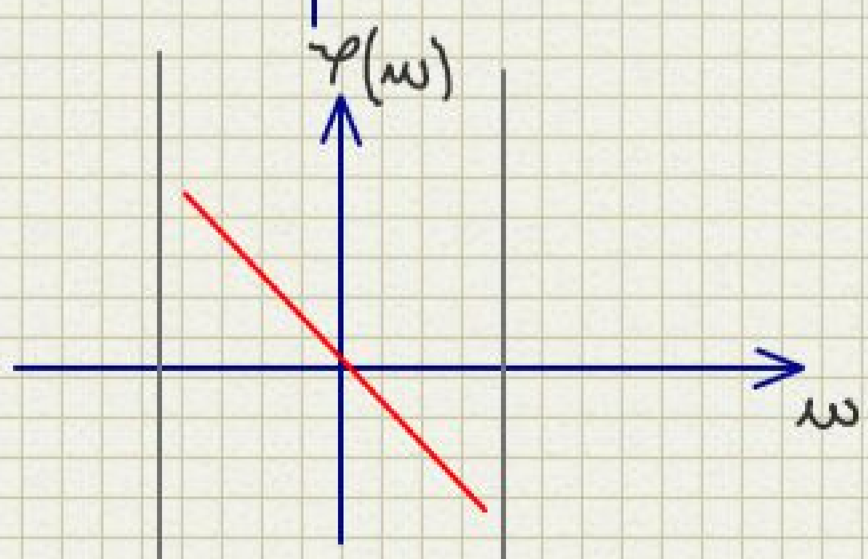
rekonstruált jel.

2. Aluláteresztővel:

$$X_*(j\omega) = \frac{T_0}{T} \sum_{p=-\infty}^{\infty} X\big(j(\omega + p\omega_s)\big)$$







rekonstruált jel:

$$H_1(j\omega) = \frac{T}{T_0}\left[\varepsilon\left(\omega + \frac{\omega_s}{2}\right) - \varepsilon\left(\omega - \frac{\omega_s}{2}\right)\right] e^{-j\omega\tau}$$

legyen $\tau = 0$

$$\frac{\omega_s}{2} = \frac{2\pi}{T2} = \frac{\pi}{T}$$

$$\hat{x}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{X}(j\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{H_1(j\omega)\cdot X_*(j\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\Big\{\frac{T}{T_0}\cdot$$

$$\cdot\left[\varepsilon\left(\omega + \frac{\pi}{T}\right) - \varepsilon\left(\omega - \frac{\pi}{T}\right)\right]\cdot X_*(j\omega)\Big\} =$$

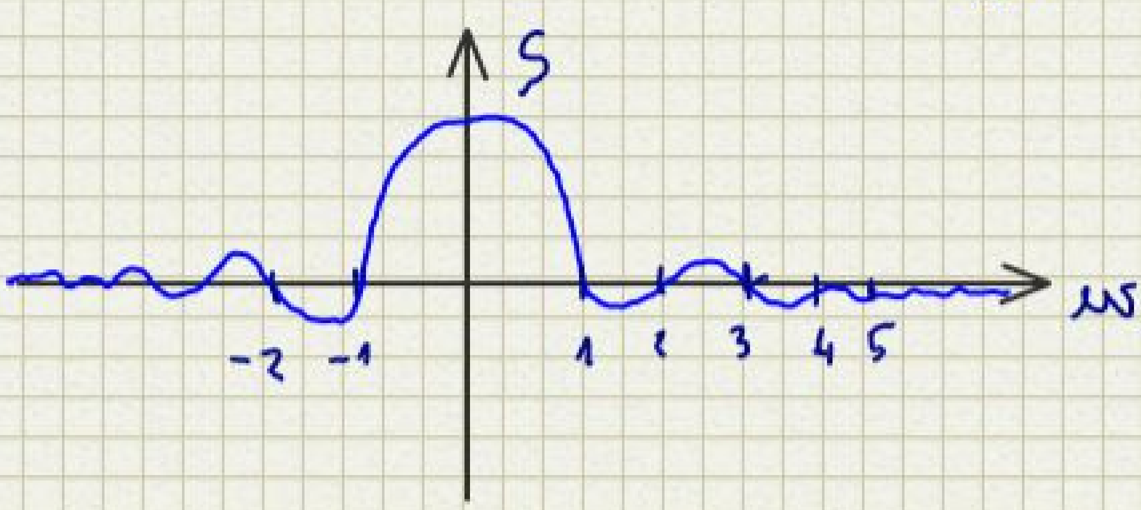
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \frac{T}{T_0} X_*(j\omega) e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \frac{T}{T_0} T_0 X_D(e^{j\vartheta})\Big|_{\vartheta = \omega T} \cdot e^{j\omega t}\, d\omega =$$

$$= \frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k] e^{-j\omega k T}\cdot e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{T}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{j\omega(t-kT)}\, d\omega =$$

$$= \frac{T}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\,\frac{e^{j\frac{\pi}{T}(t-kT)} - e^{-j\frac{\pi}{T}(t-kT)}}{j(t-kT)}$$

$$\boxed{\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\,\frac{\sin\left[\pi\left(\frac{t}{T} - k\right)\right]}{\pi\left(\frac{t}{T} - k\right)}}$$

interpolációs fgv: $S(\omega) = \dfrac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}$



$$\boxed{\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \cdot S\left(\frac{t}{T} - k\right)}$$

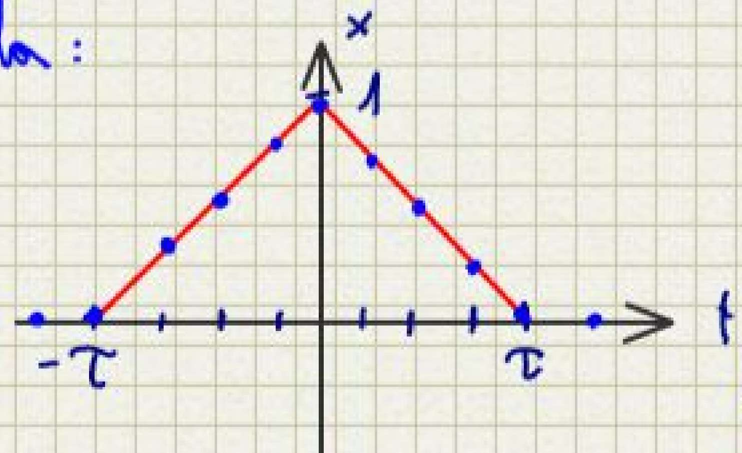
előny:

- $T < \dfrac{\pi}{\Omega}$ akkor pontos
- $t = kT$ helyen mindig pontos

hátrány:

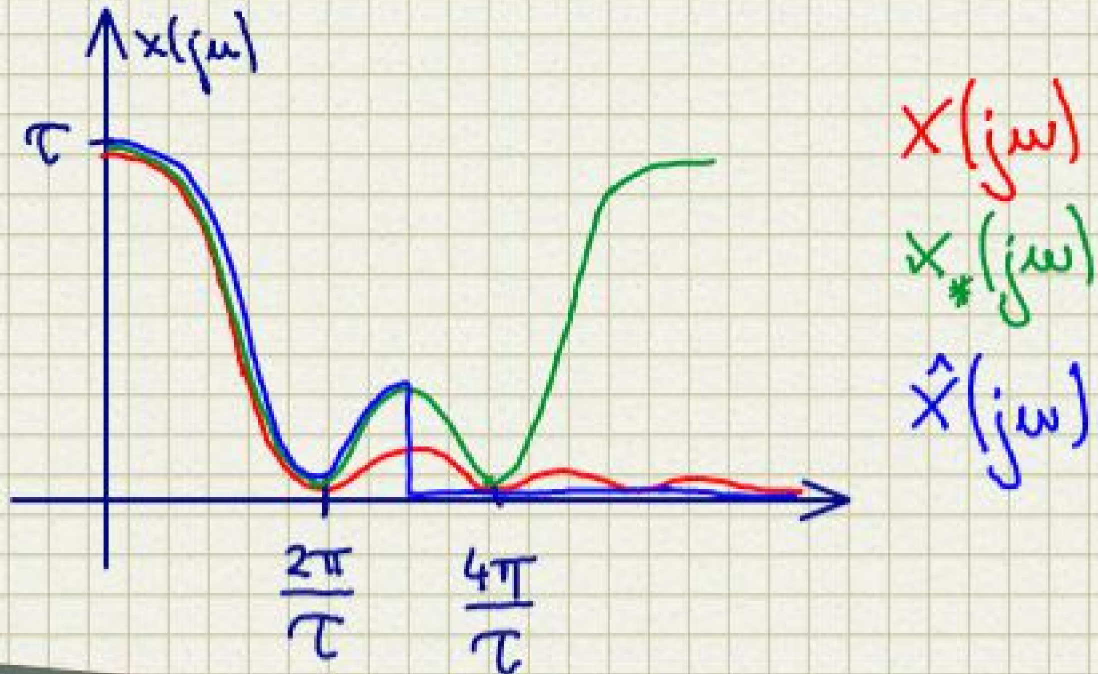
- akauzális rendszer: NEM megvalósítható.

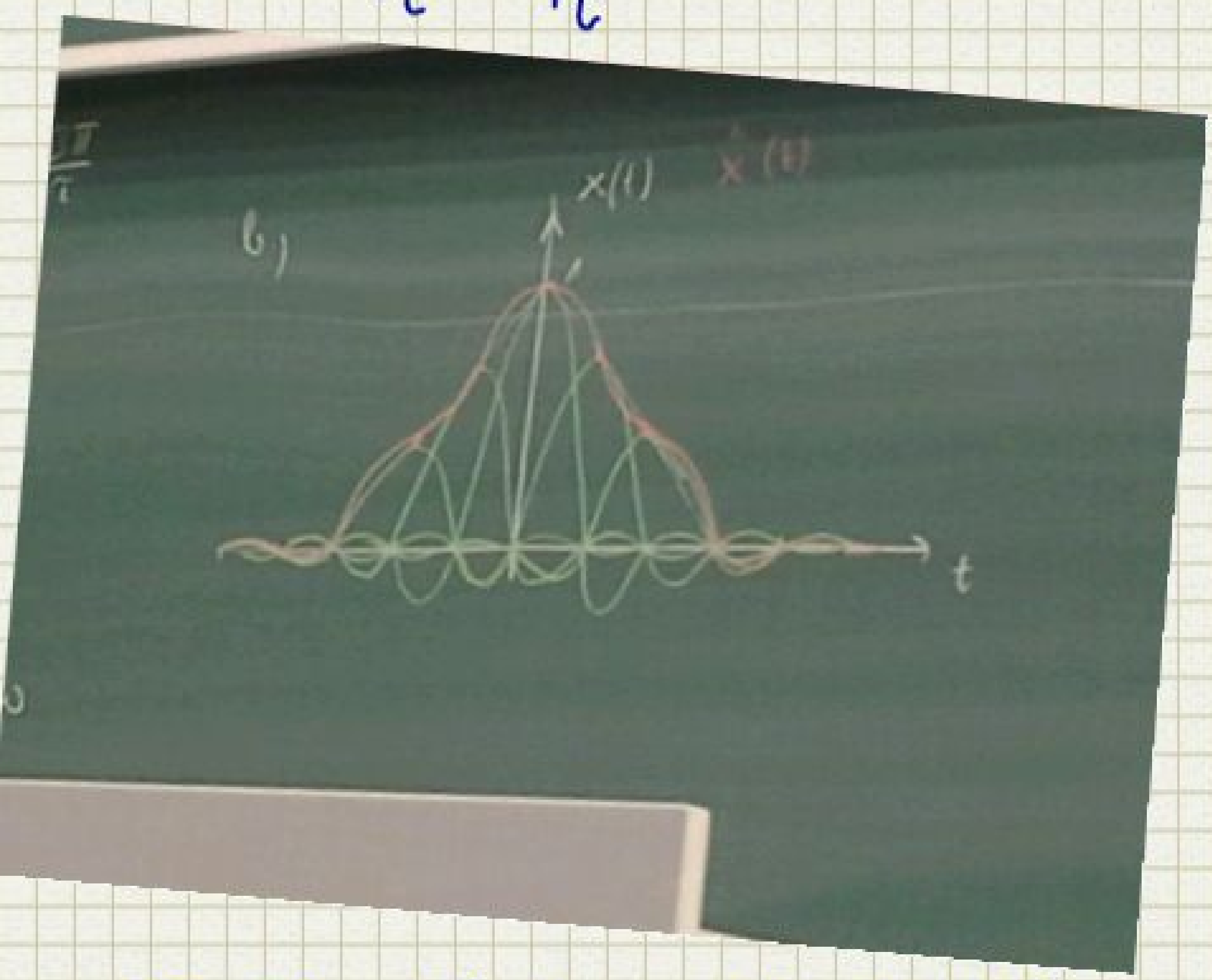
példa:



$T = \dfrac{\tau}{3}$; $\omega_s = \dfrac{6\pi}{\tau}$

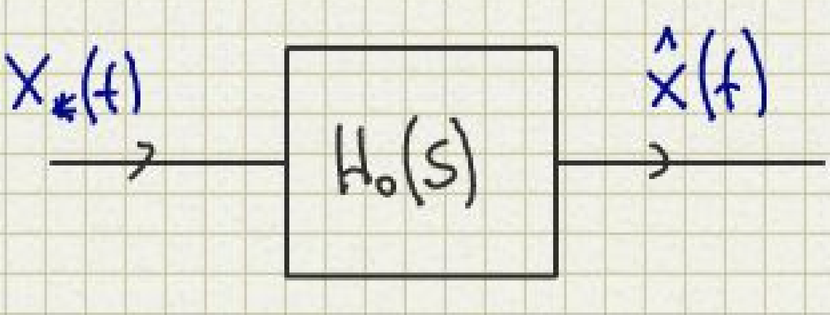
a) $X(j\omega) = \tau\left[\dfrac{\sin\left(\omega\frac{\tau}{2}\right)}{\omega\frac{\tau}{2}}\right]^2$



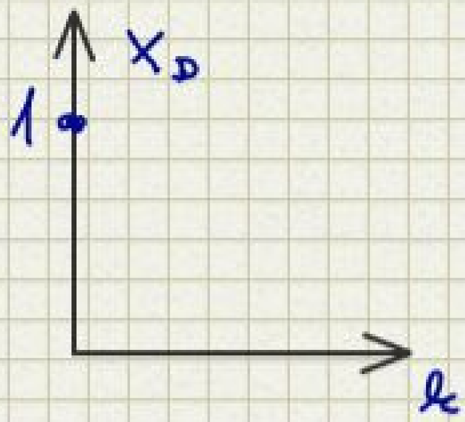


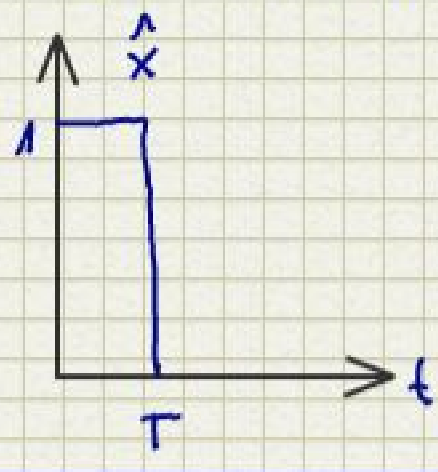
(2.) Rekonstrukció: nulladrendű tartó:

$$\hat{x}(t) = x(kT+0),\ kT \le t < kT+T$$



$x_D[k]=\delta[k] \longrightarrow x_*(t)=T_0\,\delta(t) \longrightarrow \hat{x}(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)$





$$\boxed{\begin{aligned} h_0(t) &= \frac{1}{T_0}\left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)\right] \\ H_0(s) &= \frac{1-e^{-sT}}{T_0\cdot s} \\ H_0(j\omega) &= \frac{1-e^{-j\omega T}}{T_0\cdot j\omega} = \frac{T}{T_0}\,\frac{\sin\left(\omega\frac{T}{2}\right)}{\omega\frac{T}{2}}\cdot e^{-j\omega\frac{T}{2}} \end{aligned}}$$

előnyei:

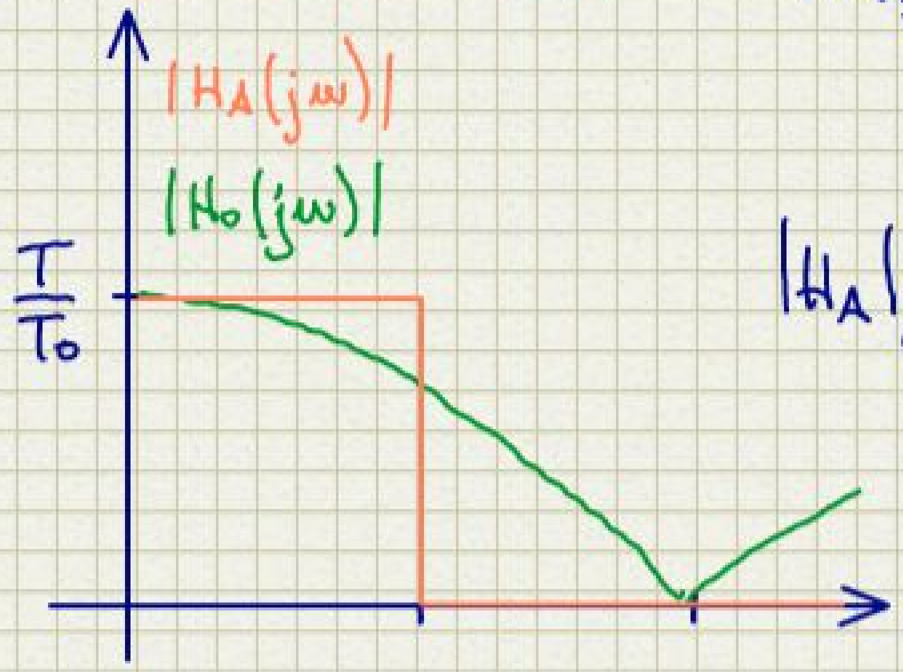
- csak az aktuális minta kell
- azonnali (on the fly) rekonstrukció.
- $t=kT$ helyen pontos

hátrány:

- gyors változásra pontatlan
- $H_0(s)$ nem rac. tf.

3. Összehasonlítás:

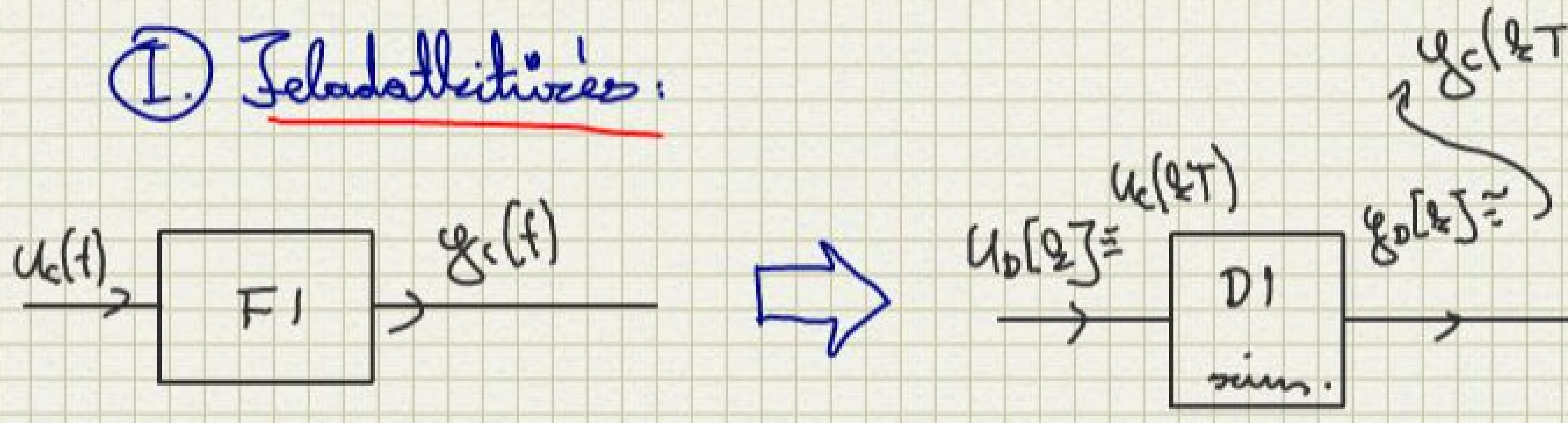
$$|H_0(j\omega)| = \left| \frac{T}{T_0} \frac{\sin \omega \frac{T}{2}}{\omega \frac{T}{2}} \right|$$



$$|H_A(j\omega)| = \frac{T}{T_0}\left[\varepsilon\left(\omega + \frac{\omega_s}{2}\right) - \varepsilon\left(\omega - \frac{\omega_s}{2}\right)\right]$$

DI SZIMULÁCIÓ:

I. Feladatkitűzés:



ideális szimulátor: $u_D[k] = u_c(kT) \Rightarrow y_D[k] = y_c(kT)$

$\forall\, u_c(t)$-re NINCS!

alapvető rendszertulajdonságok öröklődnek

(GV-stab., kauzalitás)

T megválasztása:

$T < \frac{\pi}{\Omega_u}, \frac{\pi}{\Omega_y}$ $\quad \Omega_u \cong \Delta\omega_u$ (sávszélesség)

$\Omega_y \cong \Delta\omega_y \leq \min(\Delta\omega_H, \Delta\omega_u)$

$\Delta\omega_H \sim \lambda_{max}$

II. Szimuláció az impulzusválasz alapján:

$$h_c(t) \xrightarrow{?} h_D[k]$$

$$h_c(t) = D\delta(t) + \varepsilon(t)\cdot f(t)$$

$$y_c(t) = \int_{-0}^{t} h_c(\tau)\, u_c(t-\tau)\, d\tau$$

$$y_c(t) = \int_{-0}^{kT} D\delta(\tau)\cdot u_c(kT-\tau)\, d\tau + \int_{0}^{kT} f(\tau)\cdot u_c(kT-\tau)\, d\tau =$$

$$= D\cdot u_c(kT) + \sum_{i=1}^{k} \int_{(i-1)T}^{iT} f(\tau)\cdot u_c(kT-\tau)\, d\tau \underset{\substack{\uparrow \\ T_{cc}}}{\cong}$$

$$\cong D u_c(kT) + \sum_{i=1}^{k} T f(iT)\cdot u_c((k-i)T)$$

vesd össze:

$$y_D[k] = \sum_{i=0}^{k} h_D[i]\cdot u_D[k-i] = h_D[0]\cdot u_D[k] + \sum_{i=1}^{k} h_D[i]\cdot u_D[k-i]$$

$$u_D[k] = u_c(kT)$$

$$\boxed{h_D[k] = D\delta[k] + \varepsilon[k-1]\cdot T\cdot f(kT)}$$

$$h_D[k] = \begin{cases} 0, & k<0 \\ D, & k=0 \\ Tf(kT), & k\geq 1 \end{cases}$$

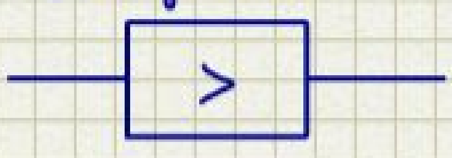
példák:

① $y_c(t) = K u_c(t) \to h_c(t) = K\delta(t) \to H_c(s) = K$

$$\downarrow$$

$h_D[k] = K\delta[k] \to H_D(s) = K$

integrátor:



② $y_c(t) = \int_{-\infty}^{t} u_c(\tau)\, d\tau \longrightarrow h_c(t) = \varepsilon(t) \to H_c(s) = \varepsilon[k-1]\, T$

$$\downarrow$$

$h_D[k] = \varepsilon[k-1] \to H_D(z) = \frac{T}{z-1}$

III. Szimuláció $H_c(s)$ alapján $(H_c(j\omega))$

szinuszjele: $u_c(t) = e^{j\omega t} \longrightarrow u_D[k] = u_c(kT) =$

$= e^{j\omega kT} = e^{j\vartheta k}$, ha $\boxed{\vartheta = \omega T}$

$$\left.\begin{aligned} y_c(t) &= H_c(j\omega)\cdot e^{j\omega t} \\ y_D[k] &= H_D(e^{j\vartheta})\cdot e^{j\overset{\omega T}{\vartheta} k} \end{aligned}\right\}$$

$y_c(kT) = y_D[k]$, ha

$$\boxed{H_D(e^{j\vartheta}) = H_c(j\omega)\Big|_{\omega = \frac{\vartheta}{T}}}$$

$$\left.\begin{aligned} H_D(e^{j\vartheta}) &= H_D(z)\Big|_{z = e^{j\vartheta}} \to \vartheta = j \ln z \\ H_c(j\omega) &= H_c(s)\Big|_{s = j\omega = \frac{\vartheta}{jT}} \end{aligned}\right\}$$

$$\underbrace{H_D(z) = H_c(s)\Big|_{s = \frac{1}{T}\ln z}}$$

NEM rac. tf. nem realizálható!

②

$s = \frac{1}{T} \ln z$ közelítése

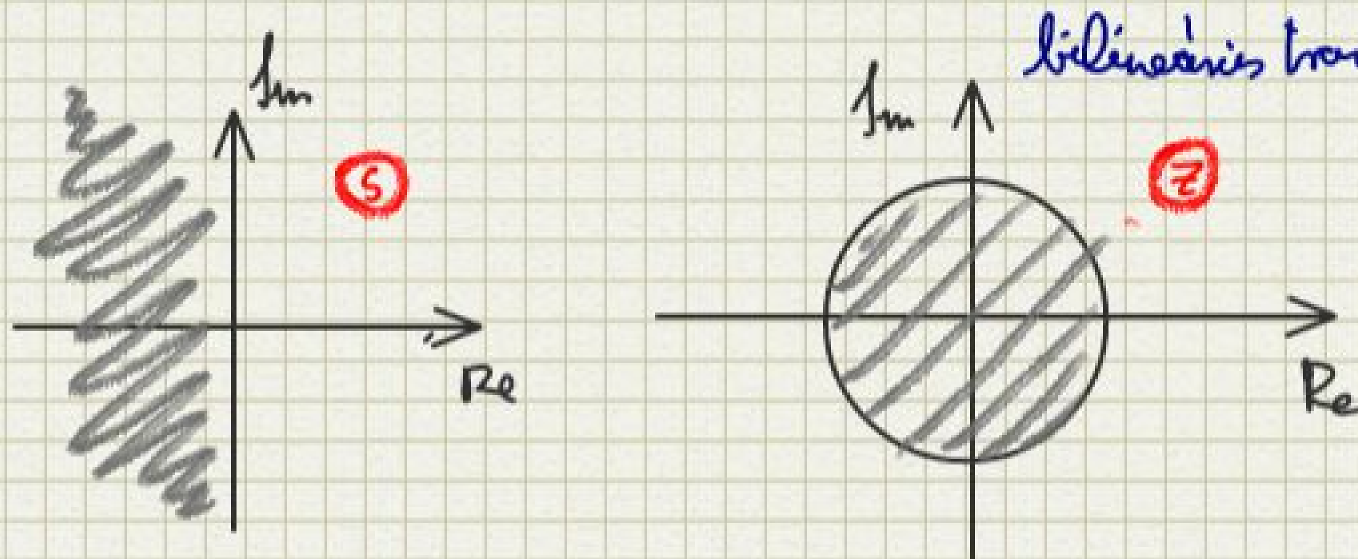
$$z = e^{sT} \cong ?$$

a) $z = 1 + sT$ ill $s = \frac{z-1}{T}$

G-V stab. nem mindig öröklődik!

b.)
$$z = e^{sT} = \frac{e^{s\frac{T}{2}}}{e^{-s\frac{T}{2}}} = \frac{1 + s\frac{T}{2}}{1 - s\frac{T}{2}} \longrightarrow \boxed{s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}$$

bilineáris transzformáció



- G-V stab.
- mindentáteresztő
- minimálfázisú

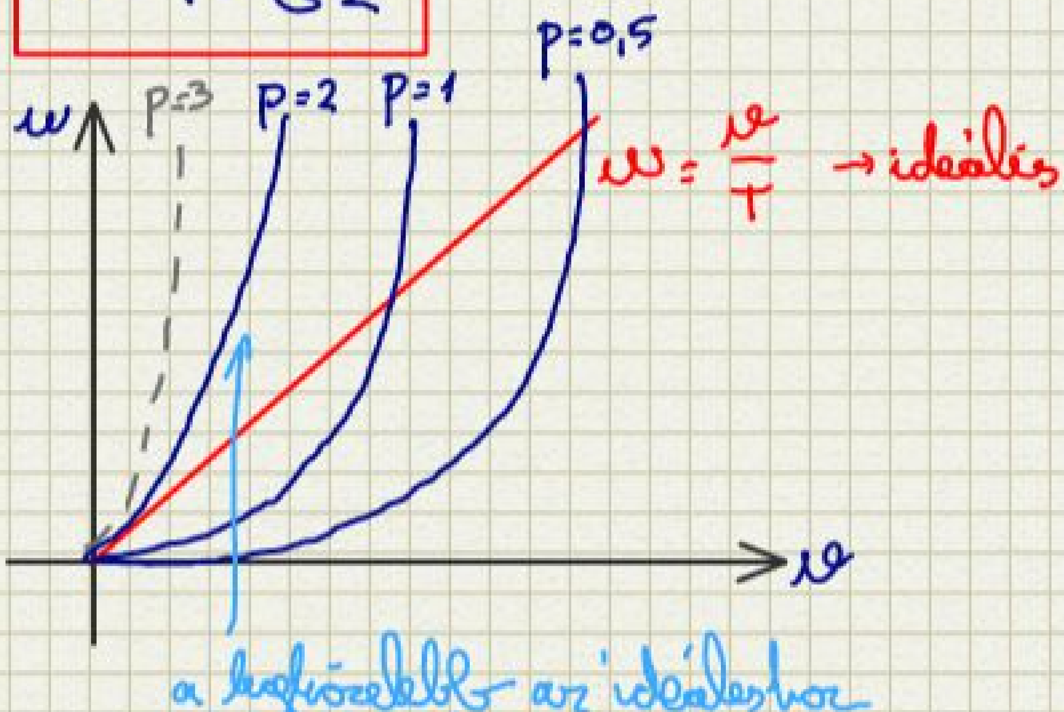
ált.:
$$\boxed{H_D(z) = H_C(s)\Big|_{s = \frac{p}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}}} \quad 0 \le p \le 2$$

③ A szimulátor „hangolása"

$s \to j\omega \qquad z \to e^{j\vartheta}$

$$j\omega = \frac{p}{T}\frac{e^{j\vartheta}-1}{e^{j\vartheta}+1} = \frac{p}{T}\frac{e^{j\frac{\vartheta}{2}}}{e^{j\frac{\vartheta}{2}}}\,\frac{e^{j\frac{\vartheta}{2}}-e^{-j\frac{\vartheta}{2}}}{e^{j\frac{\vartheta}{2}}+e^{-j\frac{\vartheta}{2}}} = \dots = \frac{p}{T}\,j\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}$$

$$\boxed{\omega = \frac{p}{T}\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}}$$



pl.: ω_0 „környékén" ideális szimulátor: $p = \dfrac{T\omega}{\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}} = \dfrac{T\omega_0}{\mathrm{tg}\frac{\omega_0 T}{2}}$

IV adott jeltípusra optimális szimulátor:

$u_D[k]=u_c(kT) \to$ DI SZIM. $\to y_D[k]=y_c(kT)$, ahol $u_c(t)$ adott jel.

① általános

$$H_D(z) = \frac{Y_D(z)}{U_D(z)} = \frac{\mathcal{Z}\{y_D[k]\}}{\mathcal{Z}\{u_D[k]\}} = \frac{\mathcal{Z}\{y_c(kT)\}}{\mathcal{Z}\{u_c(kT)\}} =$$

$$= \frac{\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\{H_c(s)\cdot U_c(s)\}\big|_{kT}\right\}}{\mathcal{Z}\{u_c(kT)\}}$$

$$H_D(z)=\frac{\mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{H_c(s)\cdot\mathcal{L}\{u_c(t)\}\}|_{kT}\}}{\mathcal{Z}\{u_c(kT)\}}$$

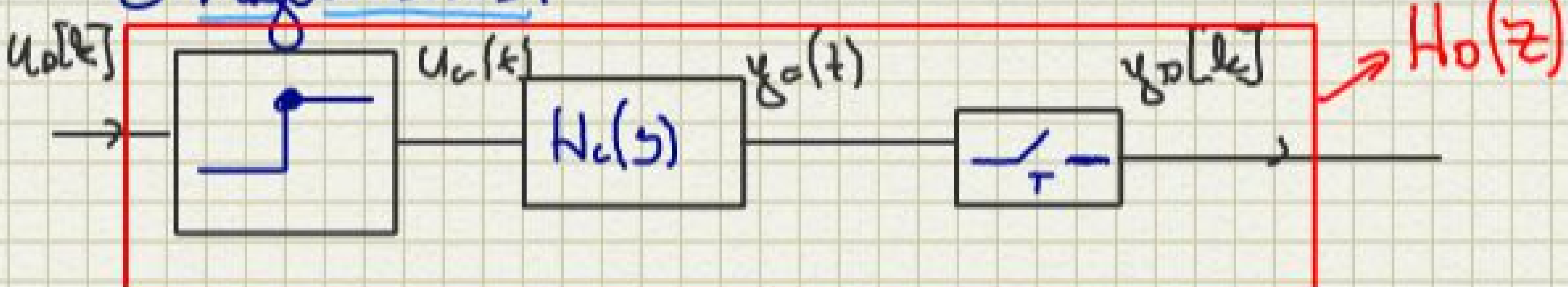
(2) Speciális: $\varepsilon(t)$-re opt. szim. – tartó-ekvivalens

$$u_c(t)=\varepsilon(t)\longrightarrow\mathcal{L}\{u_c(t)\}=\frac{1}{s}$$

$$u_c(kT)=u_D[k]=\varepsilon[k]\longrightarrow\mathcal{Z}\{\varepsilon[k]\}=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$\boxed{H_D(z)=\mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{1}{s}H_c(s)\}|_{kT}\}\cdot(1-z^{-1})}$$

⊙ megvalósítás:



(V) Példák:

(1.) $H_c(s)=\frac{2s}{s+5}$, $T=0{,}1$ → $h_c(t)$, $H_c(s)$ alapján

a) $h_c(t)$ alapján: $H_c(s)=\frac{2(s+5)-10}{s+5}=2-\frac{10}{s+5}$

$$h_c(t)=2\delta(t)-10\,\varepsilon(t)\cdot e^{-5t}$$

$$h_D[k]=2\delta[k]-10\cdot 0{,}1\cdot\varepsilon[k-1]e^{-5k\cdot 0{,}1}$$

$$e^{-0{,}5}\approx 0{,}61$$

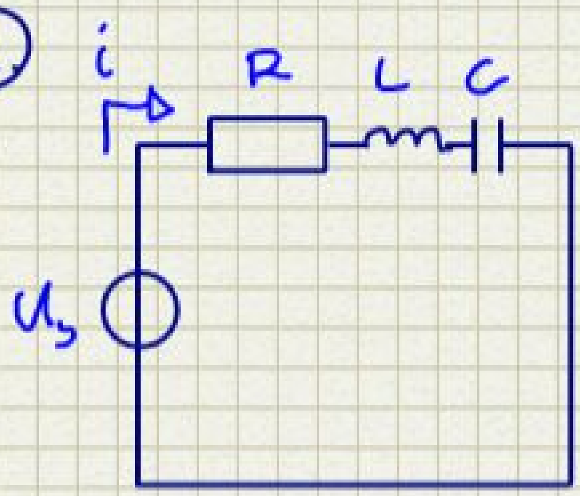
$$H_D(z)=2-0{,}61z^{-1}\frac{z}{z-0{,}61}=\underline{\underline{\frac{2z-1{,}83}{z-0{,}61}}}$$

b. $H_c(s)$ alapján (bilineáris)

$$H_D(z) = H_c(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} = \frac{2\cdot\frac{2}{0,1}\cdot\frac{z-1}{z+1}}{\frac{2}{0,1}\cdot\frac{z-1}{z+1}+5} = \frac{4z-4}{2,5z-1,5} = \underbrace{\frac{1,6z-1,6}{z-0,6}}$$

$$h_D[k] = 1,6\,\delta[k] - \varepsilon[k-1]\cdot 0,64\cdot 0,6^{k-1}$$

2.



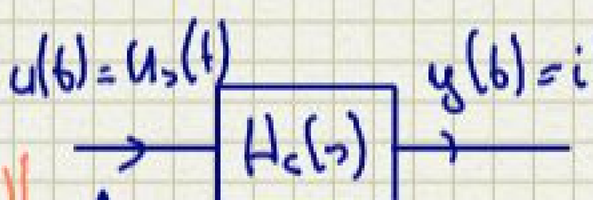
$R = 10\,\Omega$

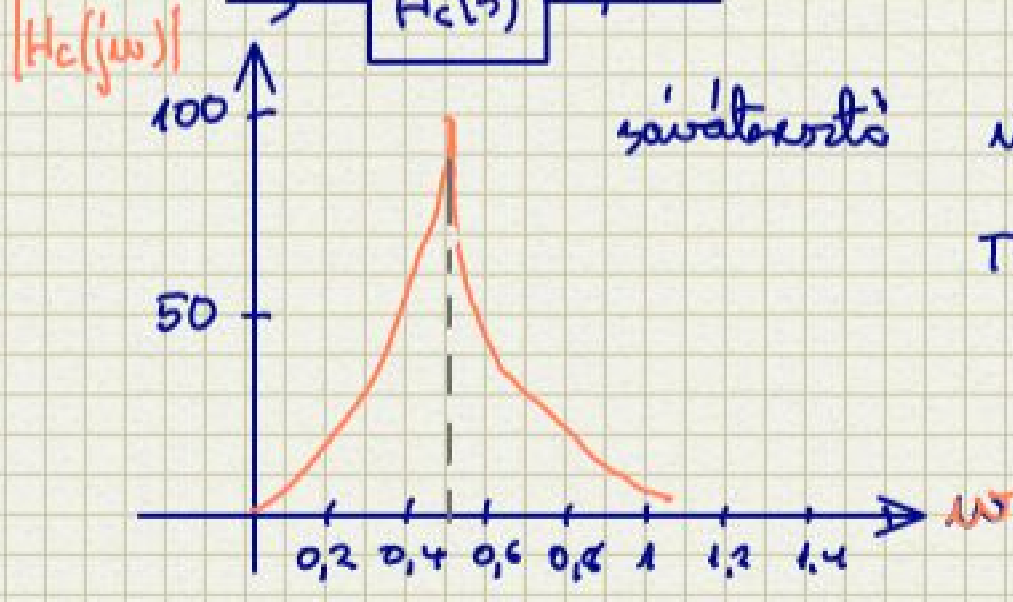
$L = 0,5\,H$

$C = 4\,\mu F$

$$H_c(s) = \frac{2s}{s^2+0,02s+0,5}$$

[kΩ, mA, H, μF, ms, krad/s]





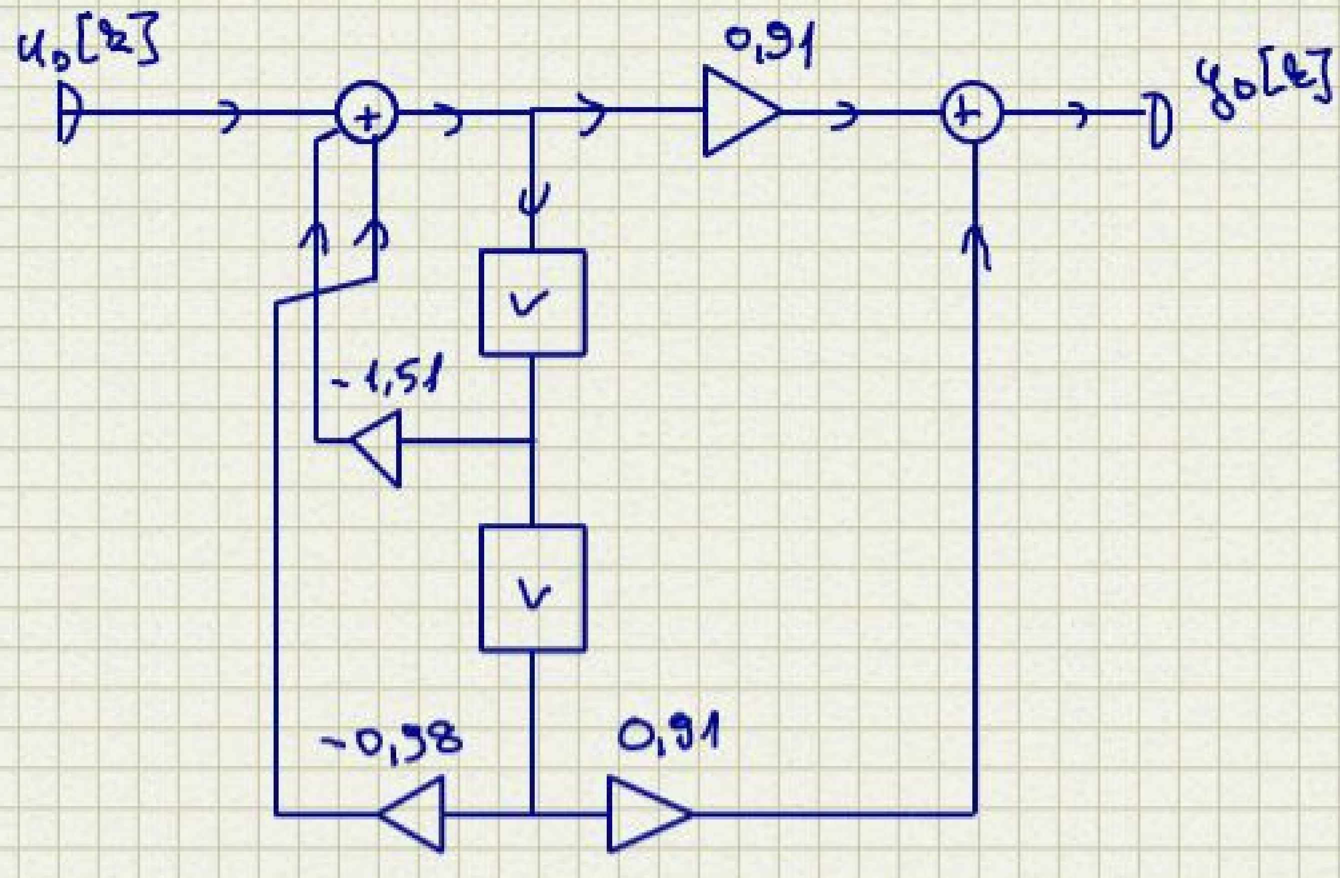
sáváteresztő

$\omega_0 = 0,7$ krad/s környékén opt.

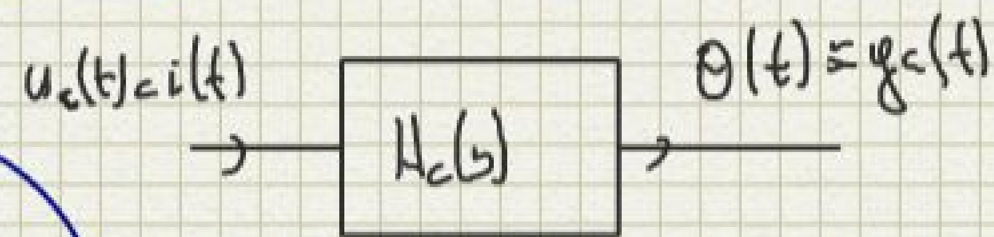
$T = ?$ $\quad T < \frac{\pi}{\omega_0} \cong 4,4\,ms \rightarrow$ legyen $T = 1\,ms$

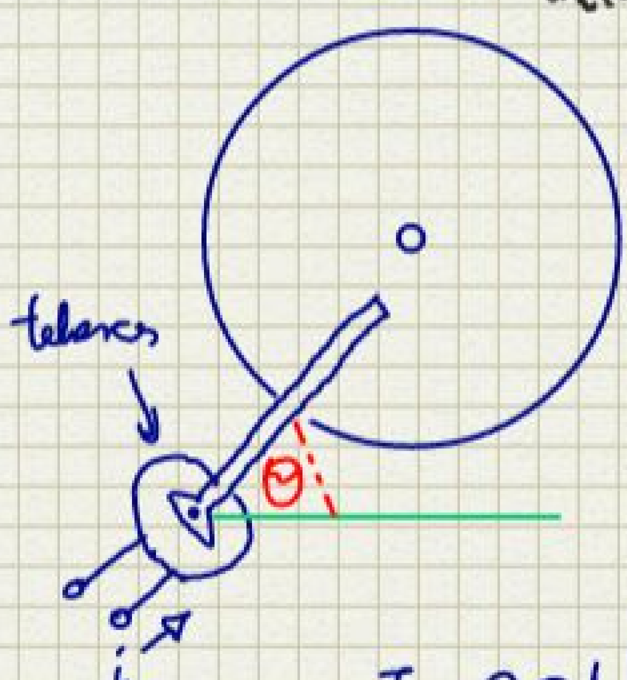
$$p = \frac{T\omega_0}{\mathrm{tg}\,\frac{\omega_0 T}{2}} \cong 1,92$$

$$H_D(z) = H_c(s)\Big|_{s=\frac{1,92}{1}\cdot\frac{z-1}{z+1}} = \ldots = \frac{0,91z^2-0,91}{z^2-1,51z+0,98}$$



③ HDD-olvasófej szabályozása (MATLAB-PÉLDA)





mozgásegyenlet:

$$J\frac{d^2\Theta}{dt^2}+C\frac{d\Theta}{dt}+K\Theta=K_i\cdot i$$

$J=0{,}01\ \mathrm{kg/m^2}$ - a fej tehetetlenségi nyomatéka

$C=0{,}004\ \mathrm{Nm/rad/s}$ - csillap.

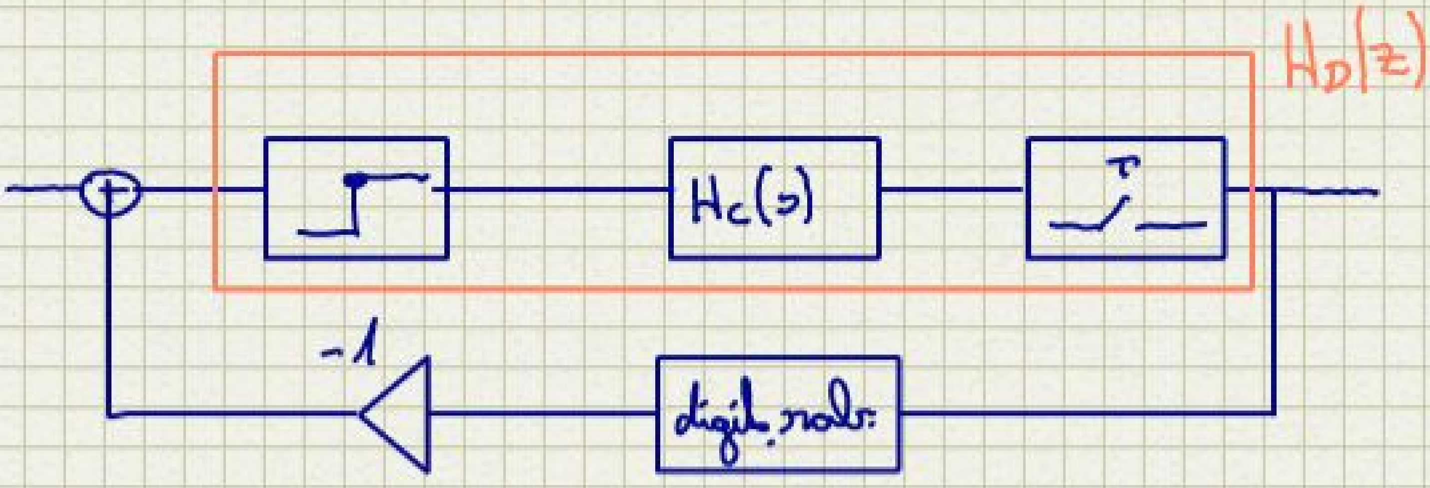
$K=10\ \mathrm{Nm/rad}$ - rugóállandó

$K_i=0{,}05\ \mathrm{Nm/A}$ - motornyomaték állandó

$$0{,}01s^2Y_c+0{,}004sY_c+10Y_c=0{,}05U_c$$

$$H_c(s)=\frac{Y_c}{U_c}=\frac{5}{s^2+0{,}4s+1000}\rightarrow p_{c\,1,2}=(-0{,}2\pm 31{,}6j)\ \mathrm{1/s}$$

$$T<\frac{\pi}{|p|}\cong 0{,}1\,s$$



tartó. ekvivalens, legyen $T=0,01$;

$$H_D(z) = (1-z^{-1})\cdot \mathcal{Z}\left\{ \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s} H_c(s)\right\}\Big|_{kT} \right\}$$

$$y_c(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s}\cdot H_c(s)\right\} = \varepsilon(t)\left[0,005 - 0,005e^{-0,2t}\cdot \cos(31,6t)\right]$$

$$y_c(kT) = \varepsilon[k]\cdot 0,005\left[1-(\underbrace{e^{-0,2T}}_{a})^{k}\cdot \cos(31,6kT)\right]$$

$a = e^{-0,002} \cong 0,998$

$\vartheta_0 = 31,6T = 0,316\,\text{rad}$

$$H_D(z) = 2,47\cdot 10^{-4}\,\frac{z+1}{z^2-1,897z+0,996}$$

matlab:

```
[num,den]=c2dm([0 0 5],[1 0,4 1000],0.01,'zoh')
```

c2dm: continuous to discrete with method

zoh: zero oder hold