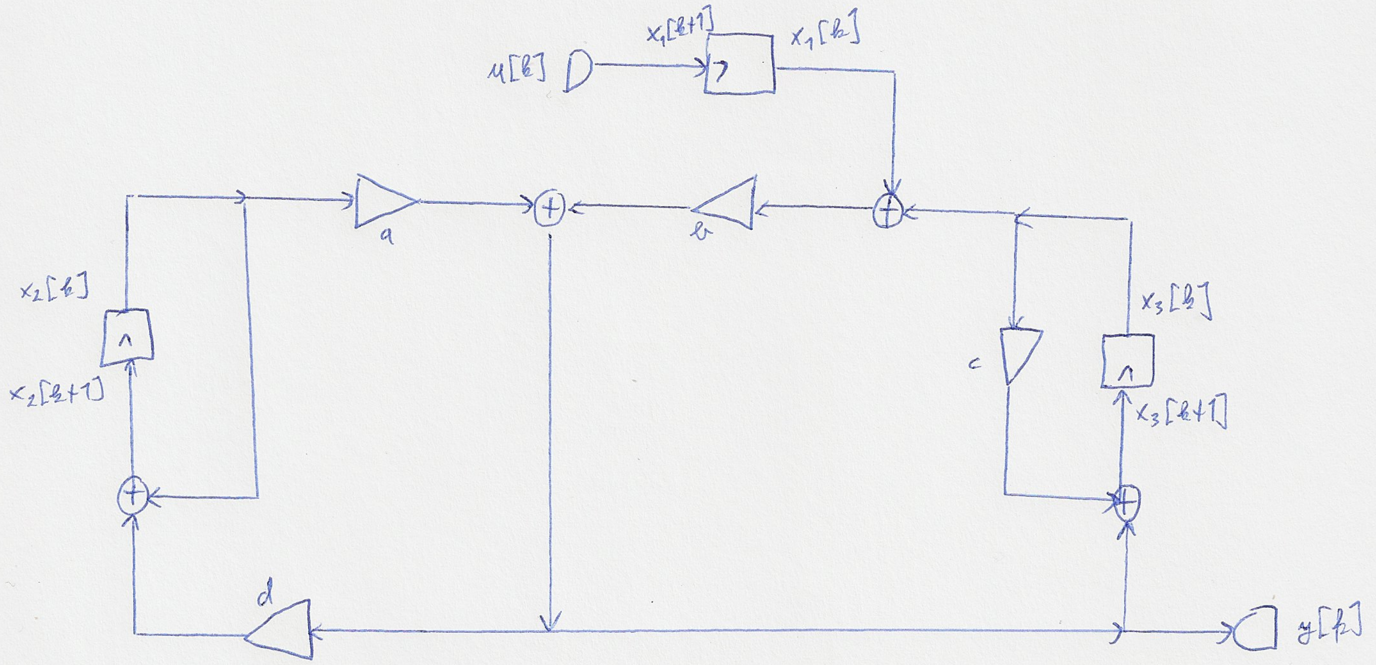
SZOBODA MARK
BFAXU5

A hálózat száma: 5.

A kapott adatsor száma: 5.

$\boxed{1.1}$ Állapotváltozós leírás normál alakja



Az erősítők értékei:

$a = -0{,}8$; $b = -1$; $c = -0{,}6$; $d = 0{,}9$

$$x[k+1] = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}[k] + \underline{B}\,u[k]$$

$$y[k] = \underline{C}^T \cdot x[k] + 0 \cdot u[k]$$

A hálózati egyenletek:

$$x_1[k+1] = 1 \cdot u[k]$$

$$x_2[k+1] = b \cdot d \cdot x_1[k] + (1 + a \cdot d) \cdot x_2[k] + b \cdot d \cdot x_3[k]$$

$$x_3[k+1] = b \cdot x_1[k] + a \cdot x_2[k] + (b + c) \cdot x_3[k]$$

$$y[k] = b \cdot x_1[k] + a \cdot x_2[k] + b \cdot x_3[k]$$

Behelyettesítve az értékeket:

$$x_1[k+1] = u[k]$$

$$x_2[k+1] = -0{,}9 \cdot x_1[k] + 0{,}28 \cdot x_2[k] - 0{,}9 \cdot x_3[k]$$

$$x_3[k+1] = -1 \cdot x_1[k] - 0{,}8 \cdot x_2[k] - 1{,}6 \cdot x_3[k]$$

$$y[k] = -1 \cdot x_1[k] - 0{,}8 \cdot x_2[k] - 1 \cdot x_3[k]$$

SZVOBODA MÁRK
BFAXWS

1.2 Sajátértékek meghatározása

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0,9 & 0,28 & -0,9 \\ -1 & -0,8 & -1,6 \end{pmatrix} \; ; \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; ; \quad \underline{c}^T = \begin{bmatrix} -1 & -0,8 & -1 \end{bmatrix} \; ; \quad D = [0]$$

MATLAB-bal:

[M, la] = eig(A) → a 3 sajátérték: 1. −1,926 $= \lambda_2$
2. 0,606 $= \lambda_3$
3. 0 $= \lambda_1$

G-V stabilitás feltétele: $|\lambda| < 1$, ez nem teljesül. Ennek érdekében a „c" erősítőm értékét az eredeti „−1"-szeresére változtatom. Így az értéke: $c = 0,6$ -ra módosul.

Így az $\underline{\underline{A}}$ mátrixom:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0,9 & 0,28 & -0,9 \\ -1 & -0,8 & -0,4 \end{bmatrix}$$

$\underline{B}$, $\underline{c}^T$ és D mátrixok változatlanok maradtak.

[M, la] = eig(A) → a 3 sajátérték: 1. −0,974 $= \lambda_2$
2. 0,8541 $= \lambda_3$
3. 0 $= \lambda_1$

Tehát így már G-V. stabilis a rendszer.

1.3 Az impulzusválasz meghatározása

Lépésről lépésre módszerrel, az állapotváltozós leírásból:

k	$u[k]$	$x_1[k]$	$x_2[k]$	$x_3[k]$	$y[k]$
0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	−1
2	0	0	−0,9	−1	1,72
3	0	0	0,648	1,12	−1,6384
4	0	0	−0,8266	−0,9664	1,6276
5	0	0	0,6383	1,0478	−1,5585
6	0	0	−0,7643	−0,9298	1,5412
7	0	0	0,6228	0,9833	−1,4816
8	0	0	−0,7106	−0,8916	1,4601
9	0	0	0,6034	0,9251	−1,4079
10	0	0	−0,6637	−0,8528	1,3837

Analitikus alak:

$$h[k] = 0 \cdot \delta[k] + \varepsilon[k-1] \cdot \left(\underline{C}^T \cdot \underline{\underline{L}}_1 \cdot \underline{B} \cdot \lambda_1^{k-1} + \underline{C}^T \cdot \underline{\underline{L}}_2 \cdot \underline{B} \cdot \lambda_2^{k-1} + \underline{C}^T \cdot \underline{\underline{L}}_3 \cdot \underline{B} \cdot \lambda_3^{k-1} \right)$$

ahol $\underline{\underline{L}}_i$ az i-edik Lagrange mátrix.

$$\underline{\underline{L}}_i = \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{n} \frac{\underline{\underline{A}} - \lambda_p \cdot \underline{\underline{I}}}{\lambda_i - \lambda_p}$$

Másképpen: $h[k] = \sum_{i=1}^{3} c_i \cdot \lambda_i^k$, ha $k \geq 2$

$\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = -0,9741$; $\lambda_3 = 0,8541$

Mivel $\lambda_1 = 0$: $h[k] = c_2 \cdot \lambda_2^k + c_3 \cdot \lambda_3^k$, ha $k \geq 2$.

Ezt írhatjuk így is: $h[k] = \varepsilon[k-2] \cdot (c_2 \cdot \lambda_2^{k-2} + c_3 \cdot \lambda_3^{k-2})$

A táblázatból az értékeket behelyettesítve:

ha $k = 2$; $h[2] = 1,72 = c_2 + c_3$

ha $k = 3$; $h[3] = -1,6384 = -0,9741 \cdot c_2 + 0,8541 \cdot c_3$

Az egyenleteket MAPLE programmal megoldva: $c_2 = 1,6997$; $c_3 = 0,0203$

$\varepsilon[k-2] \cdot (1,6997 \cdot (-0,9741)^{k-2} + 0,0203 \cdot (0,8541)^{k-2}$, ha $k \geq 2$

$h[0] = 0$; $h[1] = -1$ (ezek az értékek a lépésről lépésre módszerből adódnak)

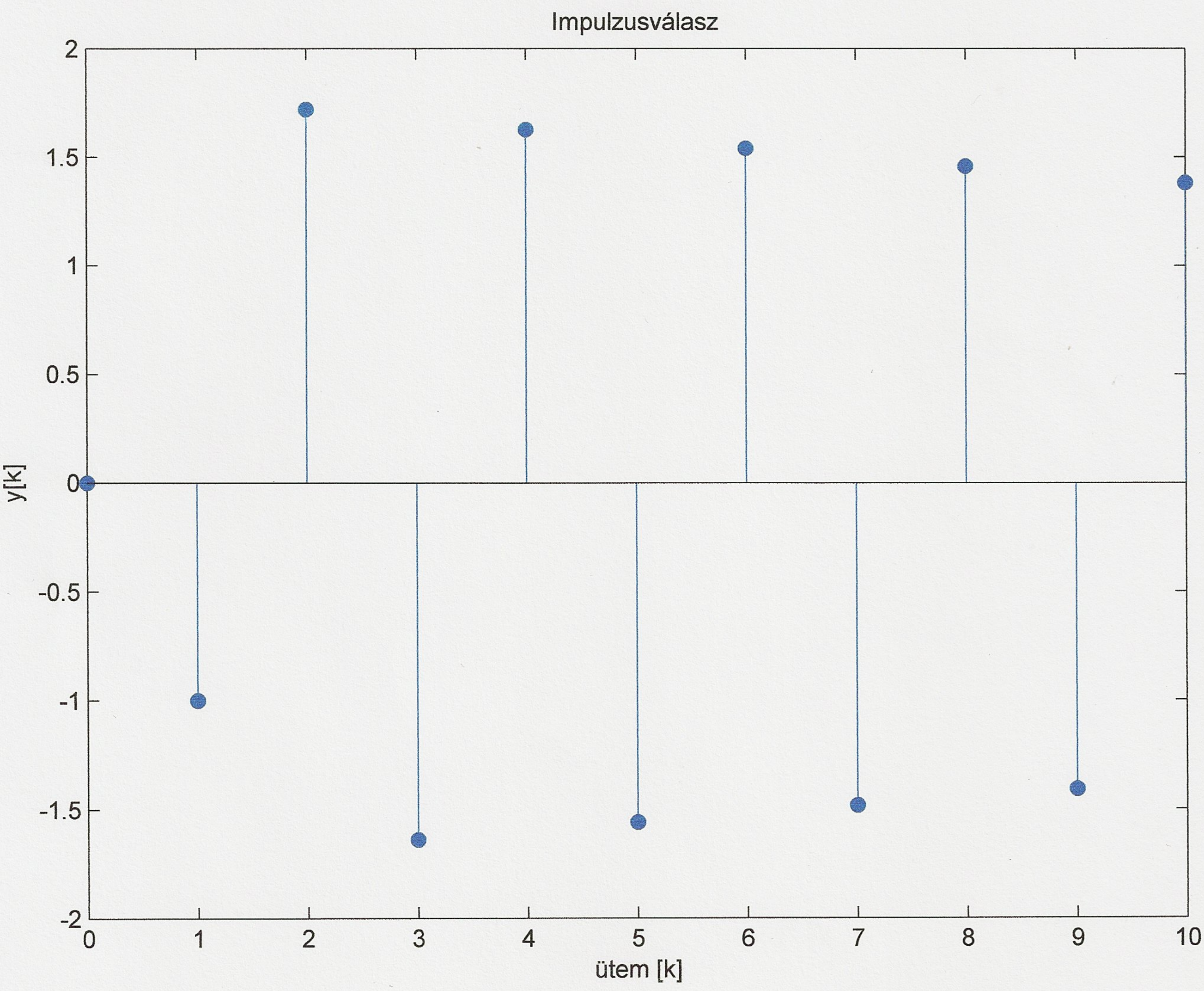
Tehát az impulzusválasz:

$$h[k] = -1 \cdot \delta[k-1] + \varepsilon[k-2] \cdot \left(1,6997 \cdot (-0,9741)^{k-2} + 0,0203 \cdot (0,8541)^{k-2}\right)$$

MATLAB:

SZVOBODA MARK
BFAXW5

```
>> k = 0:1:10;
>> Rk = -1.*(stepfun(k,1) - stepfun(k,2)) + stepfun(k,2).*(1.6997.*(-0.9741).^(k-2) +
    + 0.0203.*(0.8541).^(k-2));
>> stem(k, Rk, 'fill');
```



BFAXW5

1.4 Diszkrét konvolúció:

$u[k] = \varepsilon[k] \cdot (F + G \cdot p^k)$; $F = 2{,}2$; $G = -3{,}2$; $p = -0{,}8$; $k = 0, 1, \dots, 5$

$u[k] = \varepsilon[k] \cdot (2{,}2 + (-3{,}2) \cdot (-0{,}8)^k) = \varepsilon[k] \cdot (2{,}2 - 3{,}2 \cdot (-0{,}8)^k)$

Mivel $h[k]$ és $u[k]$ is belépő, és a rendszer kauzális, a konvolúció véges számú szorzatok összege lesz: $y[k] = h[k] * u[k]$

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i] \cdot h[k-i] \quad \Rightarrow \quad y[k] = \sum_{i=0}^{k} u[i] \cdot h[k-i]$$

(elég 0-tól k-ig szummázni)

A gerjesztés értékei:

k	$u[k]$	$h[k]$	$y[k]$
0	−1	0	0
1	4,76	−1	1
2	0,152	1,72	−6,48
3	3,8384	−1,6384	9,6736
4	0,8893	1,6276	−13,0033
5	3,2486	−1,5585	14,7696

$y[0] = u[0] \cdot h[0] = 0 \cdot (-1) = \underline{\underline{0}}$

$y[1] = u[0] \cdot h[1] + u[1] \cdot h[0] = \underline{\underline{1}}$

$y[2] = u[0] \cdot h[2] + u[1] \cdot h[1] + u[2] \cdot h[0] = \underline{\underline{-6{,}48}}$

$y[3] = u[0] \cdot h[3] + u[1] \cdot h[2] + u[2] \cdot h[1] + u[3] \cdot h[0] = \underline{\underline{9{,}6736}}$

$y[4] = u[0] \cdot h[4] + u[1] \cdot h[3] + u[2] \cdot h[2] + u[3] \cdot h[1] + u[4] \cdot h[0] = \underline{\underline{-13{,}0033}}$

$y[5] = u[0] \cdot h[5] + u[1] \cdot h[4] + u[2] \cdot h[3] + u[3] \cdot h[2] + u[4] \cdot h[1] + u[5] \cdot h[0] = \underline{\underline{14{,}7696}}$

SZVOBODA MARK
BFAXW5

$\boxed{2.1}$ Átviteli karakterisztika

Az állapotváltozós leírás átírva frekvenciatartományra:

$$X_1 e^{j\vartheta} = \overline{U}$$

$$X_2 e^{j\vartheta} = -0,9\,\overline{X}_1 + 0,28\,\overline{X}_2 - 0,9\,\overline{X}_3$$

$$X_3 e^{j\vartheta} = -\,\overline{X}_1 - 0,8\,\overline{X}_2 - 0,4\,\overline{X}_3$$

$$\overline{Y} = -\overline{X}_1 - 0,8\,\overline{X}_2 - \overline{X}_3$$

Ebből $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3$ -t kiküszöbölve megkapjuk az átviteli karakterisztikát.

MATLAB-bal:

```
>> [num, nev] = ss2tf(A, B, C, D)

  num =

        0    -1    1,6    -0,6

  nev =

        1    0,12    -0,832    0
```

Az átviteli karakterisztikát ebből már felírhatjuk:

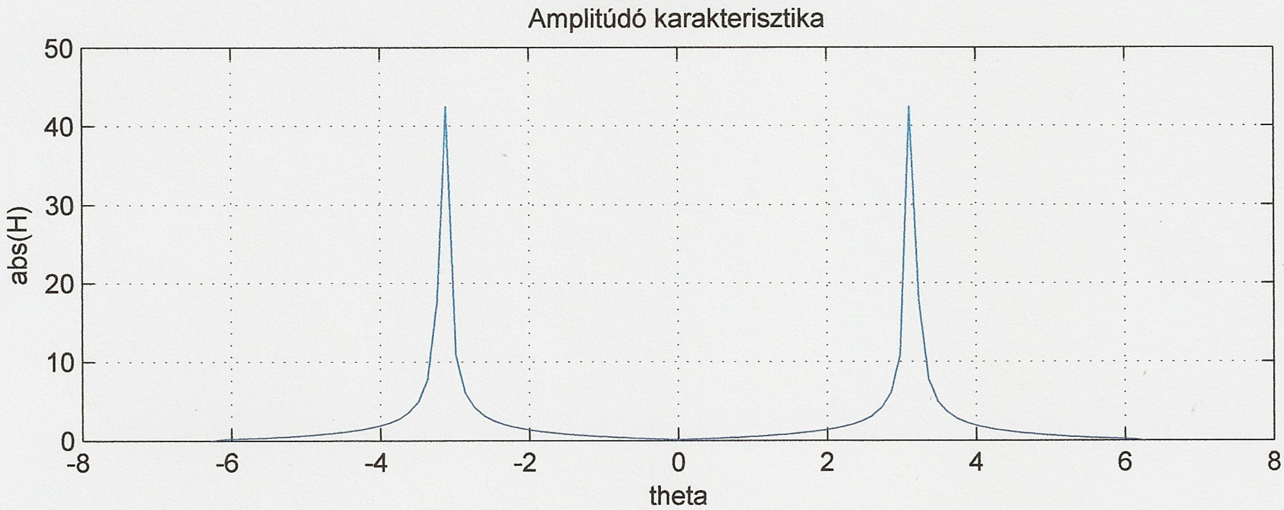
$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{\overline{Y}}{\overline{U}} = \frac{-e^{-j\vartheta} + 1,6 \cdot e^{-2j\vartheta} - 0,6 \cdot e^{-3j\vartheta}}{1 + 0,12 \cdot e^{-j\vartheta} - 0,832 \cdot e^{-2j\vartheta}}$$

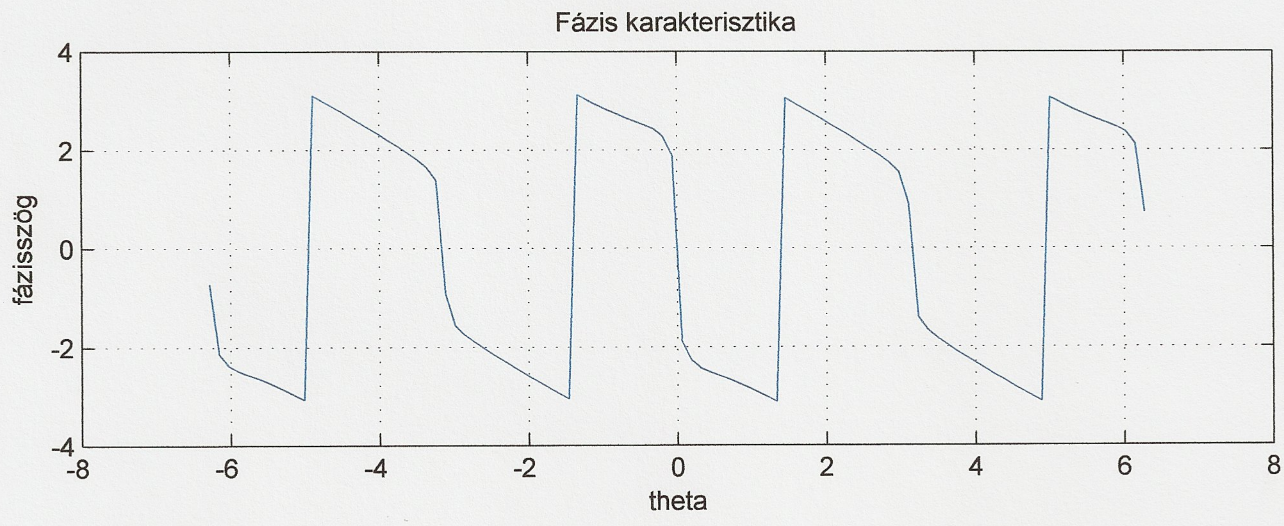
Amplitúdó karakterisztika: $K(\vartheta) = \left| H(e^{j\vartheta}) \right|$

Ábrázolása MATLAB segítségével:

```
>> te = linspace(-2.*pi, 2.*pi);   % theta
>> H = ((-exp(-j.*te) + 1,6.*exp(-2.*j.*te) - 0.6.*exp(-3.*j.*te))./((1 + 0.12.*exp(-j.*te) - 0.832.*exp(-2.*j.*te)));
>> at = abs(H);
>> an = angle(H);
>> subplot(211);
>> plot(te, at);
>> title('Amplitúdó karakterisztika');
>> xlabel('theta'); ylabel('abs(H)'); grid;
>> subplot(212);
>> plot(te, an);
>> title('Fázis karakterisztika');
>> xlabel('theta'); ylabel('fázisszög'); grid;
```

SZVOBODA MÁRK
BFAXW5





2.2 Periodikus jelre adott válasz

SZVOBODA MÁRK
BFAXWS

$u[k] = S \cdot \cos(\vartheta_0 k + \rho)$; $S = 1{,}5$; $\vartheta_0 = \frac{\pi}{16}$; $\rho = 0{,}18\pi$

$u[k] = 1{,}5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{16}k + 0{,}18\pi\right)$

$\overline{U} = 1{,}5 \cdot e^{j \cdot 0{,}18\pi}$

$$H\left(e^{j \cdot \frac{\pi}{16}}\right) = \frac{-e^{-j \cdot \frac{\pi}{16}} + 1{,}6 \cdot e^{-2 \cdot j \cdot \frac{\pi}{16}} - 0{,}6 \cdot e^{-3 \cdot j \cdot \frac{\pi}{16}}}{1 + 0{,}12 \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{16}} - 0{,}832 \cdot e^{-2 \cdot j \cdot \frac{\pi}{16}}} = \underline{0{,}1835 \cdot e^{j \cdot (-2{,}2899)}}$$

$$\overline{Y} = \overline{U} \cdot \overline{H} = 1{,}5 \cdot e^{j \cdot 0{,}18\pi} \cdot 0{,}1835 \cdot e^{-j \cdot 2{,}2899} = \underline{0{,}2753 \cdot e^{-j \cdot 1{,}7244}}$$

A válasz: $\underline{\underline{y_g[k] = 0{,}2753 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{16}k - 1{,}7244\right)}}$

A válasz akkor periodikus, ha a gerjesztőjel körfrekvenciája π racionális többszöröse.

$\frac{\pi}{16} = \vartheta_0 = \frac{2\pi}{L} \Rightarrow L = 32 \longrightarrow$ a periódus

Az $y_g[k]$ jelnek csak akkor van fizikai tartalma, ha a rendszer G-V stabilis, ami teljesül.

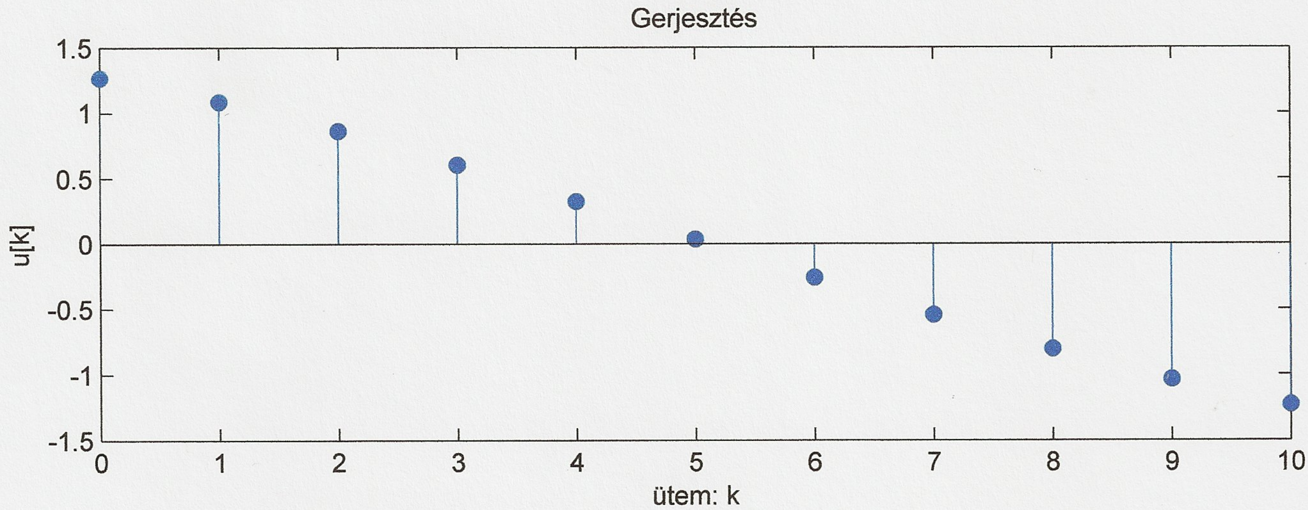
k	$u[k]$	$y_g[k]$
0	1,2665	−0,0421
1	1,0854	0,0118
2	0,8625	0,0652
3	0,6065	0,1161
4	0,3272	0,1626
5	0,0353	0,2028
6	−0,2579	0,2352
7	−0,5412	0,2586
8	−0,8037	0,2721
9	−1,0354	0,2750
10	−1,2272	0,2675

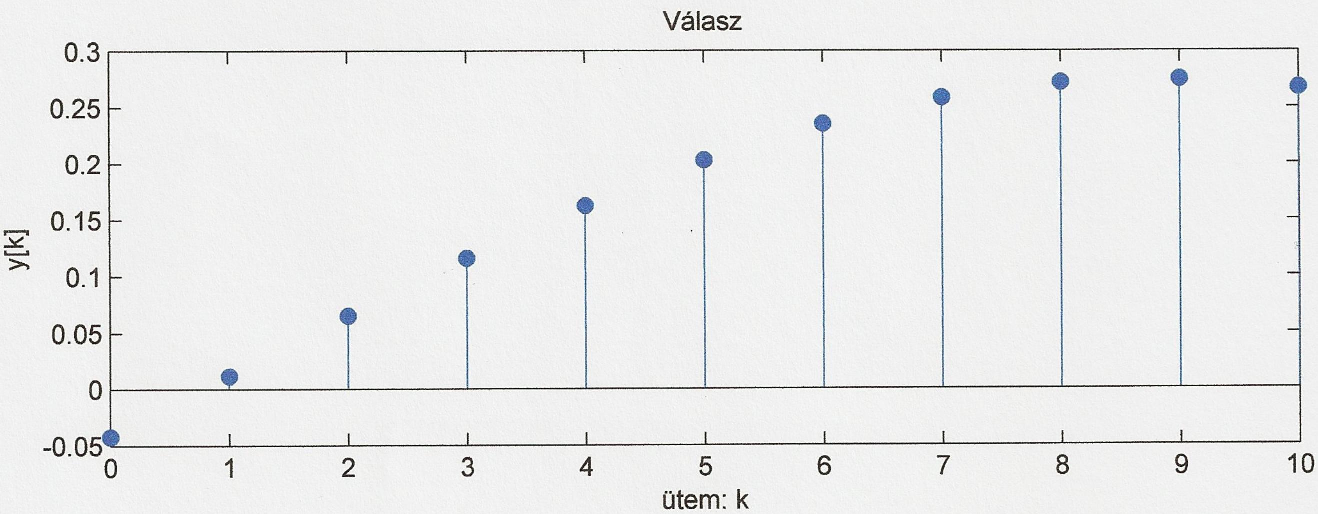
SZOBODA MÁRK

BFAXW5

MATLAB:

```
>> k = 0:10;
>> s = 1.5.*cos(pi.*k./16 + 0.18.*pi);
>> y = 0.2753.*cos(pi.*k./16 - 1.7244);
>> subplot (211);
>> stem(k, s, 'fill');
>> title ('Gerjesztés'); xlabel ('ütem: k'); ylabel('u[k]');
>> subplot (212);
>> stem(k, y, 'fill');
>> title ('Válasz'); xlabel('ütem: k'); ylabel('y[k]');
```





2.3 Fourier sor meghatározása

SZVOBODA MARK
BFAXW5

k	0	1	2	3	4	5
$u[k]$	5	1	−5	−2	7	2

$K=6 \qquad \vartheta_0 = \frac{2\pi}{K} \Rightarrow \vartheta_0 = \frac{\pi}{3}$

Az i-edik komplex Fourier együttható:

$$\overline{F}_i = \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=0}^{K-1} f[k] \cdot e^{-j \cdot i \cdot k \cdot \vartheta_0}$$

$$\overline{F}_0 = \frac{1}{6} \cdot \left[5+1-5-2+7+2\right] = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \approx 1,3333$$

$$\overline{F}_1 = \frac{1}{6} \cdot \left[5 \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot 0 \cdot \frac{\pi}{3}} + 1 \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{3}} - 5 \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{3}} - 2 \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{3}} + 7 \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{\pi}{3}} + 2 \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{\pi}{3}}\right]$$

$$\overline{F}_1 = 1,25 + 1,8764j = 2,2546 \cdot e^{j \cdot 0,9831}$$

$$\overline{F}_2 = \frac{1}{6} \cdot \left[5 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot 0 \cdot \frac{\pi}{3}} + 1 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{3}} - 5 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{3}} - 2 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{3}} + 7 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{\pi}{3}} + 2 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot 5 \cdot \frac{\pi}{3}}\right]$$

$$\overline{F}_2 = 0,0833 - 1,5877j = 1,5899 \cdot e^{-j \cdot 1,5184}$$

$$\overline{F}_3 = \frac{1}{6} \cdot \left[5 \cdot e^{-j \cdot 3 \cdot 0 \cdot \frac{\pi}{3}} + 1 \cdot e^{-j \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{3}} - 5 \cdot e^{-j \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{3}} - 2 \cdot e^{-j \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{3}} + 7 \cdot e^{-j \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{\pi}{3}} + 2 \cdot e^{-j \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{\pi}{3}}\right]$$

$$\overline{F}_3 = 1$$

$$\overline{F}_4 = \overline{F}_{6-4}^{*} = \overline{F}_2^{*} = 0,0833 + 1,5877j = 1,5899 \cdot e^{j \cdot 1,5184}$$

$$\overline{F}_5 = \overline{F}_1^{*} = 1,25 - 1,8764j = 2,2546 \cdot e^{-j \cdot 0,9831}$$

Komplex alak: $u[k] = \sum_{i=0}^{K-1} \overline{F}_i \cdot e^{j \cdot k \cdot i \cdot \vartheta_0}$

Komplex alak behelyettesítve:

$$u[k] = \frac{4}{3} + 2,2546 \cdot e^{j\left(k \cdot \frac{\pi}{3} + 0,9831\right)} + 1,5899 \cdot e^{j\left(k \cdot \frac{2\pi}{3} - 1,5184\right)} + 1 \cdot e^{j \cdot k \cdot \pi} +$$

$$+ 1,5899 \cdot e^{j\left(k \cdot \frac{4\pi}{3} + 1,5184\right)} + 2,2546 \cdot e^{j\left(k \cdot \frac{5\pi}{3} - 0,9831\right)}$$

SZVOBODA MÁRK
BFAXLL5

2.3 Fourier sor meghatározása

Valós együtthatók:

$$F_i^A = 2 \cdot \mathrm{Re}\{\bar{F}_i\} \qquad F_i^B = -2 \cdot \mathrm{Im}\{\bar{F}_i\}, \text{ ahol } 0 < i < \frac{K}{2} = 3$$

$$F_0 = \bar{F}_0 = \frac{4}{3} \qquad F_1^A = 2{,}5 \qquad F_1^B = -3{,}7528$$

$$F_2^A = 0{,}1666 \qquad F_2^B = 3{,}1754$$

$$F_3^A = \bar{F}_3 = 1 \qquad F_3^B = 0$$

Valós alak: $$u[k] = F_0 + \sum_{i=1}^{N} \left(F_i^A \cdot \cos(i \cdot k \cdot \vartheta_0) + F_i^B \cdot \sin(i \cdot k \cdot \vartheta_0)\right)$$

ahol $K = 6$; $\vartheta_0 = \frac{2\pi}{K} = \frac{\pi}{3}$ és $N = \begin{cases} \frac{K}{2}, & \text{ha } K \text{ páros} \\ \frac{K-1}{2}, & \text{ha } K \text{ páratlan} \end{cases}$

Valós alak behelyettesítve:

$$u[k] = \frac{4}{3} + 2{,}5 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{3}\right) - 3{,}7528 \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{3}\right) + 0{,}1666 \cdot \cos\left(2k \cdot \frac{\pi}{3}\right) + 3{,}1754 \cdot \sin\left(2k \cdot \frac{\pi}{3}\right) + 1 \cdot \cos\left(3k \cdot \frac{\pi}{3}\right)$$

Ellenőrzés: a diszkrét Fourier sor mindig pontosan előállítja az eredeti (gerjesztő) jelet.

Pl.: $k = 0$ -ban $u[k] = 5$

Valós alak:

$u[k] = \frac{4}{3} + 2{,}5 + 0{,}1666 + 1 \approx 5$ ⇝ valóban ✓

Hasonlóan, a megfelelő k behelyettesítésével a helyes $u[k]$ értéket szolgáltatja.

2.4 Periodikus gerjesztésre adott válasz

SZVOBODA MÁRK
BFAXW5

k	0	1	2	3	4	5
$u[k]$	5	1	-5	-2	7	2

Meghatározzuk az átviteli karakterisztika segítségével az átviteli értéket a különböző frekvenciákra.

$\vartheta = 0$

$$H(e^{j\cdot\vartheta}) = H(e^{j\cdot 0}) = \frac{Y}{U} = \frac{-e^{-j\cdot 0} + 1{,}6\cdot e^{-2\cdot j\cdot 0} - 0{,}6\cdot e^{-3\cdot j\cdot 0}}{1 + 0{,}12\cdot e^{-j\cdot 0} - 0{,}832\cdot e^{-2\cdot j\cdot 0}} = 0$$

$\vartheta = \frac{\pi}{3}$

$$H(e^{j\frac{\pi}{3}}) = 0{,}545\cdot e^{j\cdot(-2{,}8988)} = -0{,}529 - 0{,}131j$$

$\vartheta = \frac{2\pi}{3}$

$$H(e^{j\cdot\frac{2\pi}{3}}) = 1{,}528\cdot e^{j\cdot 2{,}4973} = -1{,}2217 + 0{,}9177j$$

$\vartheta = \pi$

$$H(e^{j\cdot\pi}) = 66{,}6667$$

$$u[k] = \frac{4}{3} + 4{,}5093\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot k + 0{,}9831\right) + 3{,}1798\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{3}\cdot k - 1{,}5184\right) + 1\cdot\cos(\pi\cdot k)$$

$\vartheta = 0$

$$C_1 = \frac{4}{3}\cdot 0 = 0$$

$\vartheta = \frac{\pi}{3}$

$$C_2 = 4{,}5093\cdot 0{,}545\cdot e^{j\cdot(-2{,}8988+0{,}9831)} = 2{,}4576\cdot e^{-j\cdot 1{,}9157}$$

$\vartheta = \frac{2\pi}{3}$

$$C_3 = 3{,}1798\cdot 1{,}528\cdot e^{j\cdot(2{,}4973-1{,}5184)} = 4{,}8587\cdot e^{j\cdot 0{,}9789}$$

$\vartheta = \pi$

$$C_4 = 66{,}6667$$

A válasz tehát:

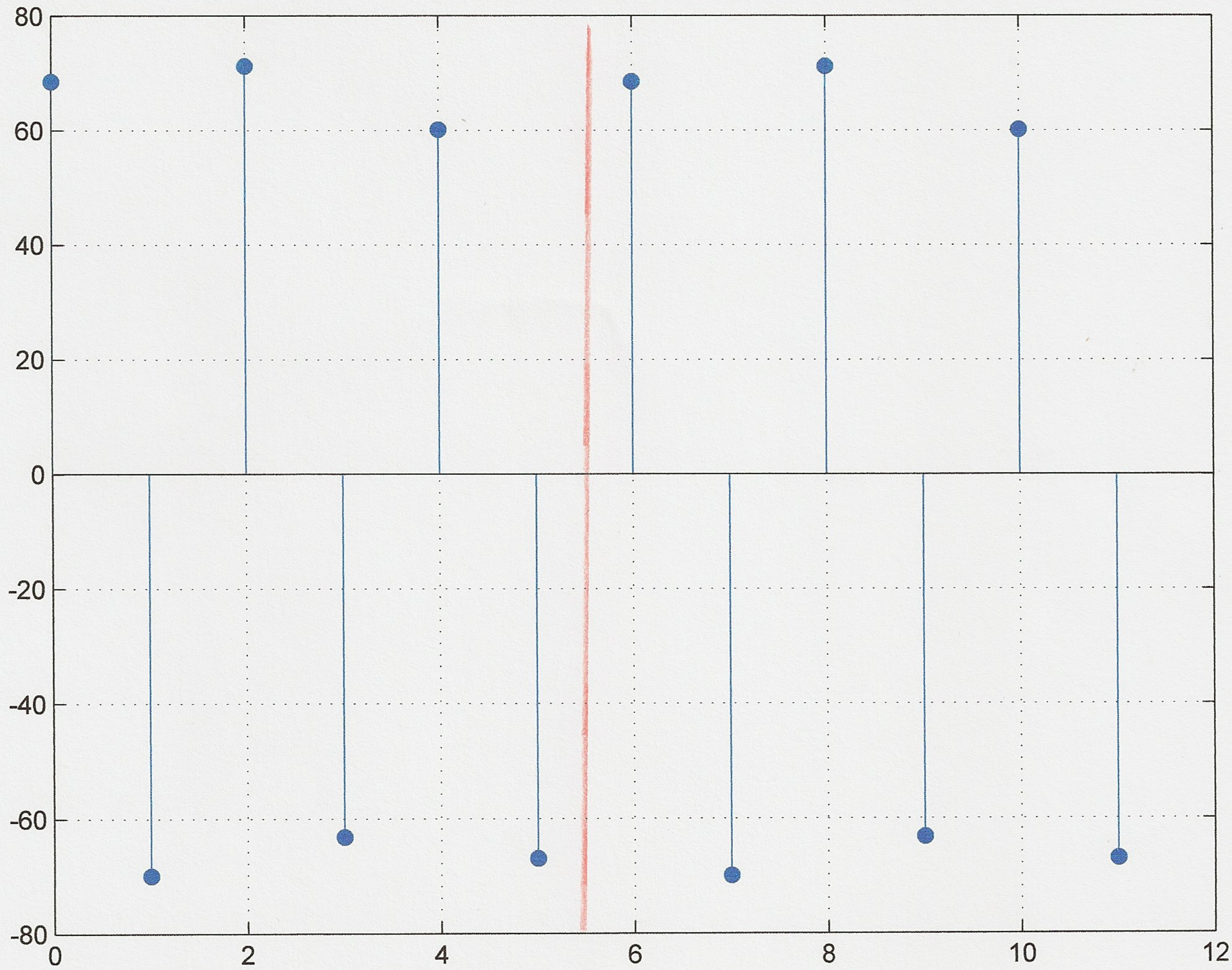
$$y[k] = 2{,}4576\cdot\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{3} - 1{,}9157\right) + 4{,}8587\cdot\cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{3} + 0{,}9789\right) + 66{,}6667\cdot\cos(k\cdot\pi)$$

MATLAB:

```
>> k=0:11;
>> yk=2.4576.*cos(k.*pi./3-1.9157)+4.8587.*cos(k.*2.*pi./3+0.9789)+66.6667.*cos(k.*pi);
>> stem(k,yk,'fill');
>> grid;
```

SZVOBODA MARK
BFAXW5

k	y[k]
0	68,5466
1	-69,9265
2	71,2217
3	-63,1249
4	60,2318
5	-66,9486



SZVOBODA MÁRK
BFAXW5

2.5 Az impulzusválasz Fourier transzformáltja

$$h[k] = -1 \cdot \delta[k-1] + \varepsilon[k-2] \cdot \left(1{,}6997 \cdot (-0{,}9741)^{k-2} + 0{,}0203 \cdot (0{,}8541)^{k-2}\right)$$

$$\mathcal{F}\{h[k]\} = \mathcal{F}\left\{-1 \cdot \delta[k-1] + \varepsilon[k-2] \cdot \left(1{,}6997 \cdot (-0{,}9741)^{k-2} + 0{,}0203 \cdot (0{,}8541)^{k-2}\right)\right\} =$$

$$= -1 \cdot e^{-j\vartheta} + \mathcal{F}\left\{\varepsilon[k-2] \cdot \left(1{,}6997 \cdot (-0{,}9741)^{k-2} + 0{,}0203 \cdot (0{,}8541)^{k-2}\right)\right\} =$$

$$= -1 \cdot e^{-j\vartheta} + \frac{1{,}6997 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \vartheta}}{1-(-0{,}9741) \cdot e^{-j\vartheta}} + \frac{0{,}0203 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \vartheta}}{1 - 0{,}8541 \cdot e^{-j\vartheta}}$$

Közös nevezőre hozva:

$$\mathcal{F}\{h[k]\} = \frac{\left(1 - 1{,}6 \cdot e^{-j\vartheta} + 0{,}5999 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \vartheta}\right) \cdot e^{-j\vartheta}}{\left(-1 + 0{,}8541 \cdot e^{-j\vartheta}\right) \cdot \left(1 + 0{,}9741 \cdot e^{-j\vartheta}\right)}$$

Szorzásokat elvégezve:

$$\mathcal{F}\{h[k]\} = \frac{e^{-j\vartheta} - 1{,}6 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \vartheta} + 0{,}6 \cdot e^{-j \cdot 3 \cdot \vartheta}}{-1 - 0{,}9741 \cdot e^{-j\vartheta} + 0{,}8541 \cdot e^{-j\vartheta} + 0{,}832 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \vartheta}}$$

Nevezőt egyszerűsítve:

$$\mathcal{F}\{h[k]\} = \frac{-e^{-j\vartheta} + 1{,}6 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \vartheta} - 0{,}6 \cdot e^{-j \cdot 3 \cdot \vartheta}}{1 + 0{,}12 \cdot e^{-j\vartheta} - 0{,}832 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \vartheta}}$$

Az eredmény azonos az átviteli karakterisztikával.

SZVOBODA MÁRK
BFAXW5

$\boxed{2.6}$ Rendszeregyenlet felírása az átviteli karakterisztikából

$$H(e^{j\cdot\vartheta}) = \frac{\overline{Y}}{\overline{U}} = \frac{-e^{-j\cdot\vartheta} + 1{,}6\cdot e^{-2j\cdot\vartheta} - 0{,}6\cdot e^{-3j\cdot\vartheta}}{1 + 0{,}12\cdot e^{-j\cdot\vartheta} - 0{,}832\cdot e^{-2j\cdot\vartheta}}$$

$$\overline{Y} + 0{,}12\cdot\overline{Y}\cdot e^{-j\cdot\vartheta} - 0{,}832\cdot\overline{Y}\cdot e^{-2j\cdot\vartheta} = -\overline{U}\cdot e^{-j\cdot\vartheta} + 1{,}6\cdot\overline{U}\cdot e^{-2j\cdot\vartheta} - 0{,}6\cdot\overline{U}\cdot e^{-3j\cdot\vartheta}$$

Mivel az $e^{-k\cdot j\cdot\vartheta}$, k-val való eltolás az időben, a rendszeregyenlet:

$$y[k] + 0{,}12\cdot y[k-1] - 0{,}832\cdot y[k-2] = -1\cdot u[k-1] + 1{,}6\cdot u[k-2] - 0{,}6\cdot u[k-3]$$

SZVOBODA MÁRK
BFAXW5

$\boxed{3.1}$ Átviteli függvény

A z-tartománybeli egyenletek:

$$\bar{X}_1 = \bar{U} z^{-1}$$

$$\bar{X}_2 = -0{,}9 \cdot \bar{X}_1 z^{-1} + 0{,}28 \cdot \bar{X}_2 z^{-1} - 0{,}9 \cdot \bar{X}_3 z^{-1}$$

$$\bar{X}_3 = -1 \cdot \bar{X}_1 z^{-1} - 0{,}8 \cdot \bar{X}_2 z^{-1} - 0{,}4 \cdot \bar{X}_3 z^{-1}$$

$$\bar{Y} = -1 \cdot \bar{X}_1 - 0{,}8 \cdot \bar{X}_2 - 1 \cdot \bar{X}_3$$

Az átviteli karakterisztikából felírható az átviteli függvény, mert a rendszer kauzális, $e^{j\vartheta} = z$ helyettesítéssel:

$$H(z) = \frac{\bar{Y}}{\bar{U}} = \frac{-1 \cdot z^{-1} + 1{,}6 \cdot z^{-2} - 0{,}6 \cdot z^{-3}}{1 + 0{,}12 \cdot z^{-1} - 0{,}832 \cdot z^{-2}}$$

SZVOBODA MÁRK
BFAXW5

3.2 Pólus - zérus elrendezés

Pólusok: ahol a nevező 0.

MATLAB-bal: >> roots(nev)

$p_1 = 0$

$p_2 = -0{,}9741$

$p_3 = 0{,}8541$

Zérusok: ahol a számláló 0.

MATLAB-bal: >> roots(szam)

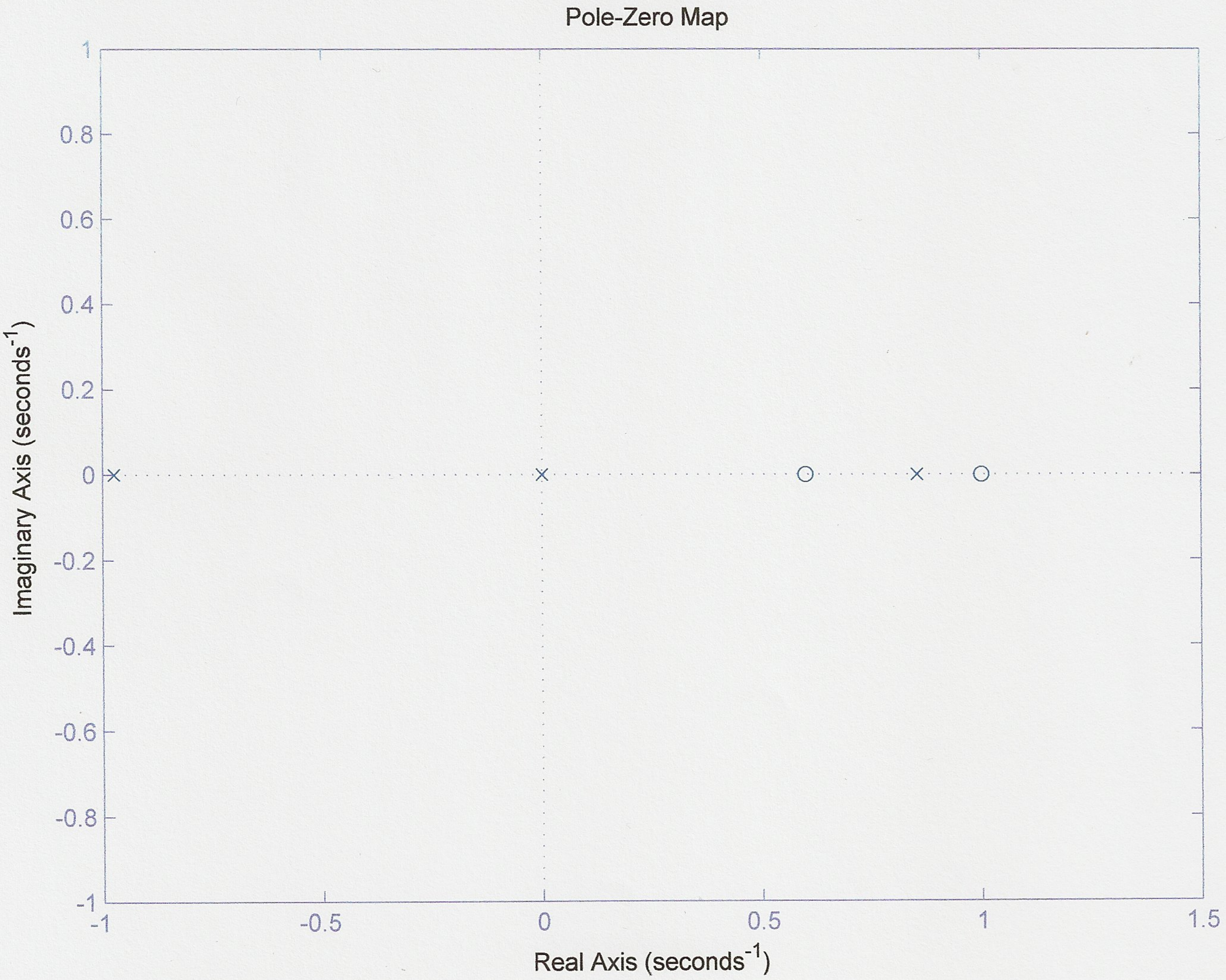
$z_1 = 1$

$z_2 = 0{,}6$

A rendszer G-V-stabilis, mivel minden pólus az egységkörön belül található.

Ábrázolás MATLAB-ban:

>> pzmap(szam, nev);



3.3 Inverz z transzformáció

SZVOBODA MÁRK
BFAXW5

$$H(z)=\frac{-1\cdot z^2+1{,}6\cdot z-0{,}6}{z^3+0{,}12\cdot z^2-0{,}832\,z}$$

$$Z^{-1}\{H(z)\}=h[k]$$

A nevezőből kiemelek z^{-1}-t és a megmaradt törtet részlettörtekre bontom.

>> [r, p, k] = residue([-1 1,6 -0.6], [1 0.12 -0.832])

$r = 1.6997$, 0.0203 $\quad p = -0.9741$, 0.8541 $\quad k = -1$

Ennek alapján: $H(z)=z\cdot z^{-2}\cdot\left(-1+\frac{1{,}6997}{z-(-0{,}9741)}+\frac{0{,}0203}{z-0{,}8541}\right)=$

$$=-1\cdot z^{-1}+z^{-2}\cdot\left(\frac{1{,}6997}{z-(-0{,}9741)}\cdot z+\frac{0{,}0203}{z-0{,}8541}\cdot z\right)$$

Így már tagonként visszatranszformálható:

$$h[k]=-1\cdot\delta[k-1]+\varepsilon[k-2]\cdot\left(1{,}6997\cdot(-0{,}9741)^{k-2}+0{,}0203\cdot(0{,}8541)^{k-2}\right)$$

Az eredmény megegyezik az 1.3-ban kapottal.

Ellenőrzés:

$$(-1\cdot z^{-1}+1{,}6\cdot z^{-2}-0{,}6\cdot z^{-3}):(1+0{,}12\cdot z^{-1}-0{,}832\cdot z^{-2})=-1\cdot z^{-1}+1{,}72\cdot z^{-2}-1{,}6384\cdot z^{-3}+1{,}6276\cdot z^{-4}-1{,}5584 z^{-5}$$

$-(-1\,z^{-1}-0{,}12z^{-2}+0{,}832z^{-3})$

$1{,}72z^{-2}-1{,}432z^{-3}$

$-(1{,}72z^{-2}+0{,}2064\,z^{-3}-1{,}431\,z^{-4})$

$-1{,}6384z^{-3}+1{,}431z^{-4}$

$-(-1{,}6384z^{-3}-0{,}1966\,z^{-4}+1{,}3631z^{-5})$

$1{,}6276\,z^{-4}-1{,}3631z^{-5}$

$-(1{,}6276z^{-4}+0{,}1953z^{-5}-1{,}3542z^{-6})$

$-1{,}5584z^{-5}+1{,}3542z^{-6}$ ...

A kapott eredmény inverz z transzformálásával kapjuk az ~~imp.~~ választ:
(felhasználva, hogy $Z^{-1}\{1\}=\delta[k]$ és z^{τ} τ-val való eltolás)

$$h[k]=-1\cdot\delta[k-1]+1{,}72\cdot\delta[k-2]-1{,}6384\cdot\delta[k-3]+1{,}6276\cdot\delta[k-4]-1{,}5584\cdot\delta[k-5]$$

3.4 A válasz számítása

SZVOBODA MÁRK
BFAXW5

$$u[k] = \varepsilon[k]\cdot(F + G\cdot p^k) = \varepsilon[k]\cdot\left(2{,}2 + (-3{,}2)\cdot(-0{,}8)^k\right)$$

$$\mathcal{Z}\{u[k]\} = \frac{2{,}2\cdot z}{z-1} + \frac{-3{,}2\cdot z}{z-(-0{,}8)} = U(z)$$

$$Y(z) = H(z)\cdot U(z) = \left(\frac{-1z^2 + 1{,}6z - 0{,}6}{z^3 + 0{,}12z^2 - 0{,}832z}\right)\cdot\left(\frac{2{,}2\cdot z}{z-1} + \frac{-3{,}2\cdot z}{z-(-0{,}8)}\right)$$

Közös nevezőre hozva, majd a szorzásokat elvégezve:

$$Y(z) = \frac{z^2 - 5{,}56\cdot z + 2{,}976}{z^3 + 0{,}92\cdot z^2 - 0{,}736\cdot z - 0{,}6656}$$

Részlettörtekre bontás MATLAB segítségével:

```
>> szam = [0  1  -5.56  2.976]
>> nev = [1  0.92  -0.736  -0.6656]
>> [r, p, k] = residue(szam, nev)
r =  29.345          p = -0.9741          k=0
    -0.345               0.8541
    -28                 -0.8
```

$$Y(z) = \frac{29{,}345}{z-(-0{,}9741)} + \frac{-0{,}345}{z-0{,}8541} + \frac{-28}{z-(-0{,}8)}$$

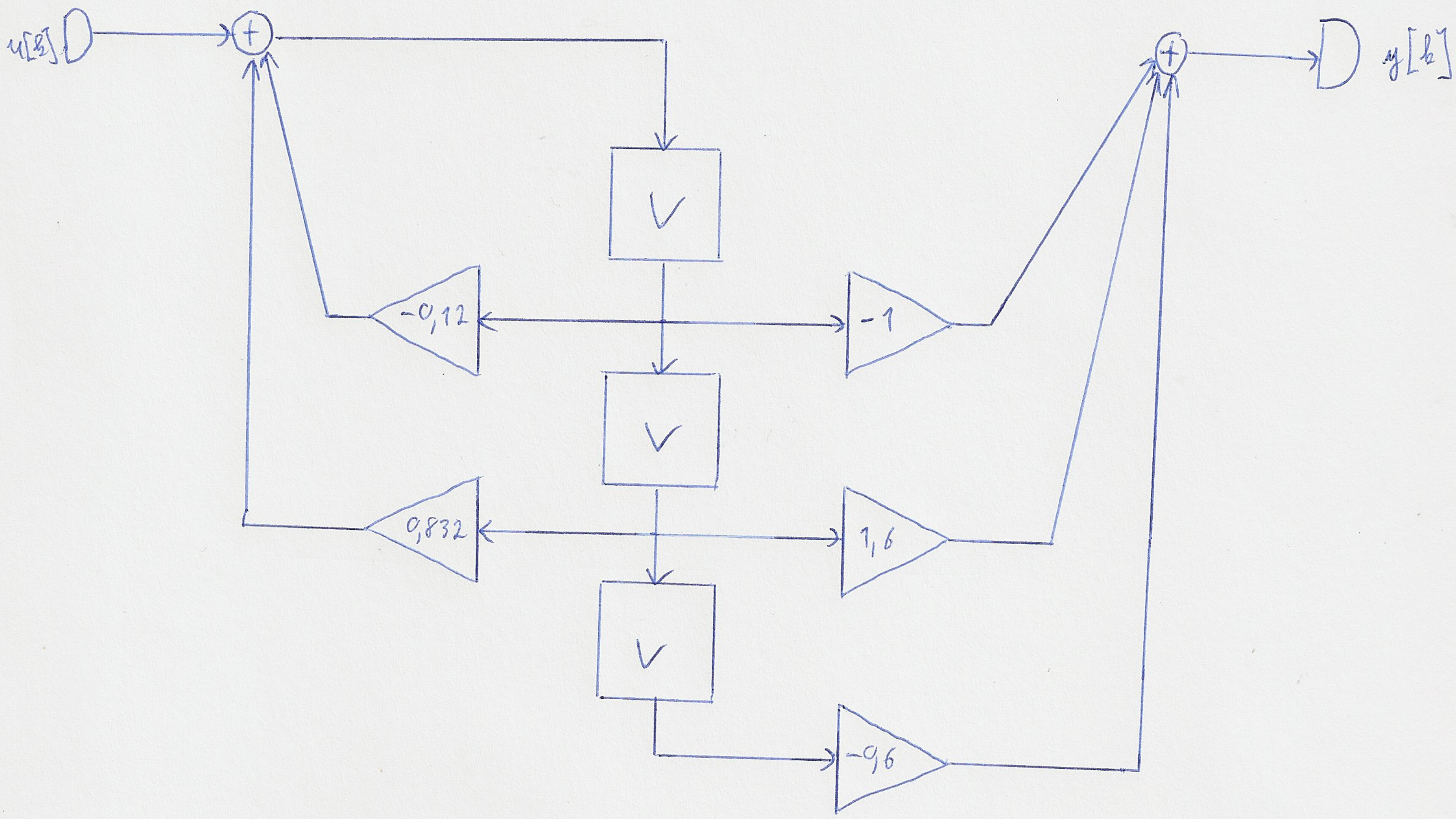
$$Y(z) = z^{-1}\cdot\left(\frac{29{,}345\cdot z}{z-(-0{,}9741)} + \frac{-0{,}345\cdot z}{z-0{,}8541} + \frac{-28\cdot z}{z-(-0{,}8)}\right)$$

$$\underline{y[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \varepsilon[k-1]\cdot\left(29{,}345\cdot(-0{,}9741)^{k-1} + (-0{,}345)\cdot(+0{,}8541)^{k-1} + (-28)\cdot(-0{,}8)^{k-1}\right)}$$

3.5 Kanonikus hálózat

SZVOBODA MÁRK
BFAXWS

$$H(z) = \frac{-1 \cdot z^{-1} + 1{,}6 \cdot z^{-2} - 0{,}6 \cdot z^{-3}}{1 + 0{,}12 \cdot z^{-1} - 0{,}832 \cdot z^{-2}}$$



Rendszeregyenlet

$$y[k] = -1 \cdot u[k-1] + 1{,}6 \cdot u[k-2] - 0{,}6 \cdot u[k-3] - 0{,}12 \cdot y[k-1] + 0{,}832 \cdot y[k-2]$$

SZVOBODA MÁRK
BFAXW5

3.6 Fokozatos behelyettesítés a rendszeregyenletbe

Gerjesztés: $u[k] = \varepsilon[k] \cdot (2,2 + (-3,2) \cdot (-0,8)^{k})$

A válasz analitikus alakja:

$$y[k] = \varepsilon[k-1] \cdot \left(29,345 \cdot (-0,9741)^{k-1} + (-0,345) \cdot (0,8541)^{k-1} + (-28) \cdot (-0,8)^{k-1}\right)$$

Rendszeregyenlet:

$$y[k] = -1 \cdot u[k-1] + 1,6 \cdot u[k-2] - 0,6 \cdot u[k-3] - 0,12 \cdot y[k-1] + 0,832 \cdot y[k-2]$$

Ellenőrzés Excel segítségével:

k	u[k]	y[k] analitikus	y[k] rendszer
−3	0	0	0
−2	0	0	0
−1	0	0	0
0	−1	0	0
1	4,76	1	1
2	0,152	−6,4796	−6,48
3	3,8384	9,6729	9,6736
4	0,8893	−13,0024	−13,0034
5	3,2486	14,7685	14,7698
6	1,3611	−16,7184	−16,72
7	2,8711	17,5961	17,5979
8	1,6631	−18,6631	−18,6652

A válasz értékei megegyeznek.