Jelek és jelfeldolgozás (BMEVIHVBB01)
9. előadásvázlat

Szerkesztette: Dr. Horváth Bálint Péter, BME-HVT

2022.05.24.

1. Általános periodikus válasz

Egy DI jel periodikus, ha

$$x[k+L] = x[k], \quad k \in \mathbb{Z}, L \in \mathbb{N},$$

ekkor a komplex Fourier-együtthatók segítségével kifejezhető az alábbi módon:

$$x[k] = \sum_{p=<L>} X_p^C e^{jp\Theta k}, \quad k \in \mathbb{Z}, \Theta = \frac{2\pi}{L}, p = 0, 1, ...L-1,$$

ahol a komplex Fourier-együtthatók meghatározhatóak:

$$X_p^C = \frac{1}{L} \sum_{k=<L>} x[k] e^{-jp\Theta k}, \quad p \in \mathbb{Z}, \Theta = \frac{2\pi}{L}$$

1.1. Parseval-tétele

A jel energiája kifejezhető idő- és frekvencatartománybeli reprezentáció alapján is, és ezek megegyeznek.

$$P_x = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} |x[k]|^2$$

$$P_x = \frac{1}{L} \sum_{p=<L>} \left| X_p^C[k] \right|^2$$

1.2. Mérnöki valós alak

Valós értékű periodikus jelek Fourier-soros alakja felírható az alábbi módon is:

$$x[k] = X_0 + \sum_{p=1}^{M} X_p \cos(p\Theta k + \gamma_p) + X_{\frac{L}{2}} (-1)^k,$$

ahol

$$X_0 = X_0^C, \quad X_p = 2|X_p^C|, \quad \gamma_p = \arg(X_p^C)$$

$$M = \begin{cases} \frac{L}{2} - 1, & \text{ha L páros} \\ \frac{L-1}{2}, & \text{ha L páratlan} \end{cases}$$

2. Periodikus válasz Fourier-sora

Ismert a periodikus gerjesztés

$$u[k] = U_0 + \sum_{p=1}^{M} U_p \cos(p\Theta k + \nu_p) + U_{\frac{L}{2}}(-1)^k$$

, és a rendszer átviteli karakterisztikája $H(e^{j\vartheta})$. A gerjesztés által kijelölt frekvenciák mindegyikén meghatározható az átviteli tényező:

$$H_p = H(e^{j\vartheta})|_{\vartheta=p\Theta} = H(e^{jp\Theta}) = K_p \cdot e^{j\varphi_p}, \quad p = 0, 1, ...M, \frac{L}{2}$$

A válasz együtthatói és fázisai az alábbiak szerint megkaphatóak:

$$Y_p = K_p \cdot U_p, \quad \eta_p = \varphi_p + \nu_p.$$

Ebből következik, hogy ezt a gerjesztés minden frekvenciáján elvégezve a szuperpozíció elve alapján a válaszokat összegezve, megkapjuk a rendszer válaszát a periodikus gerjesztésre:

$$y[k] = Y_0 + \sum_{p=1}^{M} Y_p \cos(p\Theta k + \eta_p) + Y_{\frac{L}{2}}(-1)^k$$

,

3. Válasz számítása frekvenciatartományban

Amennyiben az $x[k]$ DI jel abszolút összegezhető, úgy meghatározható a (komplex értékű, valós paraméterű) spektruma:

$$X(e^{j\vartheta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\vartheta k},$$

ezt nevezzük a jel Fourier-transzformáltjának. Megj.: a DI idejű jelek spektruma mindig periodikus.

3.1. Néhány jel spektruma

$$\mathcal{F}\{\delta[k]\} = 1$$

$$\mathcal{F}\left\{\varepsilon[k]q^k\right\} = \frac{1}{1 - qe^{-j\vartheta}}, \quad \text{ha } |q| < 1$$

3.2. Fourier-transzformáció tulajdonságai, tételei

Linearitás

$$\mathcal{F}\{c_1 x_1[k] + c_2 x_2[k]\} = c_1 \mathcal{F}\{x_1[k]\} + c_2 \mathcal{F}\{x_2[k]\}$$

Időbeli eltolás

$$\mathcal{F}\{x[k]\} = X(e^{j\vartheta})$$

$$\mathcal{F}\{x[k-L]\} = X(e^{j\vartheta})e^{-j\vartheta L}, L \in \mathbb{Z}$$

Moduláció

$$\mathcal{F}\left\{x[k]\cdot e^{j\vartheta_0 k}\right\} = X(e^{j(\vartheta-\vartheta_0)})$$

Konvolúció

$$\mathcal{F}\left\{x[k]*f[k]\right\} = X(e^{j\vartheta})\cdot F(e^{j\vartheta})$$