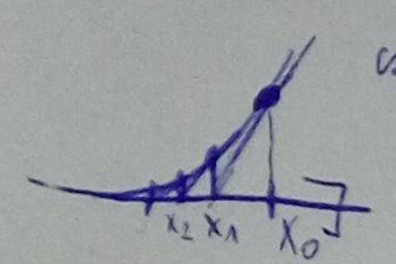
Newton-módszer

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$ (zérushely keresése)

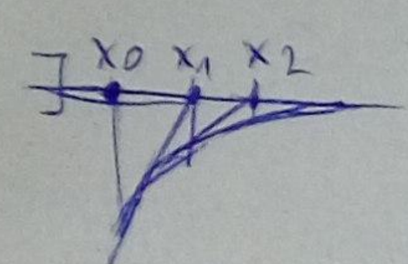
x_0: jó kezdeti érték
- nem mindig konvergens
- ha igen, akkor kvadratikusan

csökkenő, alulról közelít



$f>0,\ f'>0,\ f''>0$

pl.



növekvő, alulról közelít

$f<0,\ f'>0,\ f''<0$

Ha $\left|\frac{f\cdot f''}{(f')^2}\right| < 1$, $\forall x \in [a,b]$ $\Rightarrow$ ebben az intervallumban választott x_0 biztosítja a konvergenciát

legkisebb derivált; legnagyobb f''; hiba; közelítés; megoldás

$[a,b]$-n $|f'| \geq m > 0$ és $|f''| \leq M$, $e_k = |x_k - x^*|$, akkor

$$\boxed{e_{k+1} \leq \frac{M}{2m}\cdot e_k^2}$$ (hiba felső becslése)

szélsőérték keresés: $f'(x) = 0$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

többváltozós eset:

zérus: $x_{k+1} = x_k - J^{-1}(x_k)\cdot F(x_k) \Rightarrow \boxed{J(x_k)\cdot(x_{k+1}-x_k) = -F(x_k)}$

Jacobi: $J_F = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$

szélsőérték:

$$H_F(x_k)\cdot(x_{k+1}-x_k) = -\nabla F(x_k)$$

Hesse: $H_F = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ $\qquad \nabla F = \frac{\partial F}{\partial x_i}$

Fixpont: $f(x^*) = x^*$ (helyben marad)

$f(x) - x = 0$ - ra vezetjük vissza

Kontrakció: $\exists\, 0<q<1$, $\forall x,y \in [a,b]$: $|f(x)-f(y)| \leq q\cdot|x-y|$

euklideszi távolság (de másfajta távolság is jó lehet)

(ha kontrakció, akkor folytonos)

Lipschitz: ugyanaz, de q lehet 1-nél nagyobb

Lagrange-középérték: létezik olyan c, $x \leq c \leq y$, hogy $f(x) - f(y) = f'(c)\cdot(x-y)$

$\Downarrow$

ha $|f'(x)| \leq q < 1$, $\forall x \in [a,b] \Rightarrow f$ kontrakció

Banach fixpont tétel:

$f: [a,b] \to [a,b]$ és kontrakció! $\Rightarrow$ $f(x^*) = x^*$ pontosan egy megoldása van

fixpont iteráció: $x_{k+1} = f(x_k)$, $\forall x_0 \in [a,b]$

$$x_k \to x^*$$

többvált: $x_{k+1} = F(x_k)$; $|F(x)-F(y)| = q\cdot|x-y|$, $0<q<1$, $\forall x,y \in A$

Banach tér: lineáris, metrikus, teljes

metrikus: van értelmezett távolságfgv

teljes: $\forall$ Cauchy sorozat konvergens

Általánosítás:

- kontrakció: $T: X \to X$, $\forall a,b \in X$, $\varrho(T(a), T(b)) \leq q \cdot \varrho(a,b)$, $0<q<1$

  X: Banach-tér

  ϱ: távolság fgv.

- fixpont: $T: X \to X$ + kontrakció

$$\exists!\, x^* \in X : T(x^*) = x^* \quad \text{és} \quad x_{k+1} = T(x_k),\ \forall x_0 \in X$$

$$x_k \to x^* : \varrho(x_k, x^*) \to 0$$

Tétel: Ha T^2 (vagy T^k) kontrakció $\Rightarrow$ T-nek van fixpontja (de T^2 kontrakció $\not\Rightarrow$ T kontrakció)

Brouwer-fixpont tétel: (ha nincs kontrakció, de konvex a halmaz)

$T: K \to K$, $K \in \mathbb{R}^n$, K zárt, korlátos

T folytonos („csak" folytonos, gyengített feltétel) $\Rightarrow \exists x^*, T(x^*) = x^*$

(nem egyértelmű fix pont)

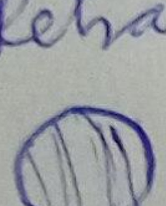
K konvex halmaz (erősítés)

konvex: két pont összekötése a halmazon belül marad

fixpont keresés:

$$(T - \underbrace{I}_{\text{egységmátrix}}) = 0$$

Retrakció:



B: gömb

S: gömb pereme (B határa)

$T: B \to S$ retrakció, ha $T(x) = x$, $\forall x \in S$ (a határ helyben marad)

Nincs folytonos retrakció!

Interpoláció: A függvény a mért értékeket felvegye, vagy a legkisebb hibával közelítse.

$P = ?$ $\quad P(x_j) = y_j, \quad 1 \le j \le n$

$x_j \in K \subset \mathbb{R}^d, \quad y_j \in \mathbb{R}$ (kezdeti feltételek)

$P = a_1 \cdot f_1(x) + \ldots + a_m \cdot f_m(x)$

$f_1, \ldots, f_m$: rögzített fgv-ek (bázis)

$a_1, \ldots, a_m$: keresett ismeretlenek

m db ismeretlen

n db egyenlet

Ha $m = n$:

$$\boxed{P(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot \frac{L_j(x)}{U\begin{pmatrix} f_1 \cdots f_n \\ x_1 \cdots x_n \end{pmatrix}}}$$

$L_j(x)$: $f_1 \ldots f_n$ lineáris kombinációja

$L_j(x)$: $U\begin{pmatrix} f_1 \cdots f_n \\ x_1 \cdots x_n \end{pmatrix}$

$\hat{x}$ j. oszlopban x_j helyett x szerepel!

$$U\begin{pmatrix} f_1 \cdots f_n \\ x_1 \cdots x_n \end{pmatrix} = \det\big(f_j(x_i)\big) = \det \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \cdots & f_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & & \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

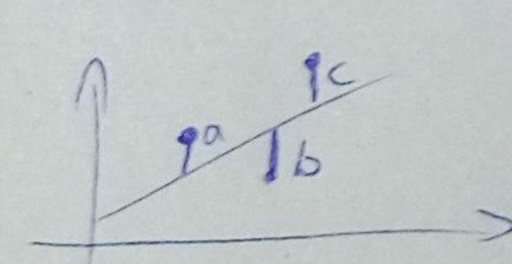
Vandermonde-det

n×n-es mátrix

Ha f-ek csak polinomok: $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$

$$w(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \qquad P(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \cdot \frac{w(x)}{(x - x_j) \cdot w'(x_j)}$$

Ha $m > n$: általában nincs pontos megoldás



$a^2 + b^2 + c^2$ legyen minimális

Legkisebb négyzetek módszere

$P = c_1 \cdot \varphi_1(x) + c_2 \cdot \varphi_2(x) + \ldots + c_n \cdot \varphi_n(x)$

$P(x_j) = b_j \quad 1 \le j \le m$

$$A = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) \\ \vdots & & & \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \cdots & f_n(x_m) \end{pmatrix}$$

m×n mátrix (Vandermonde-szerű)

$$x = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

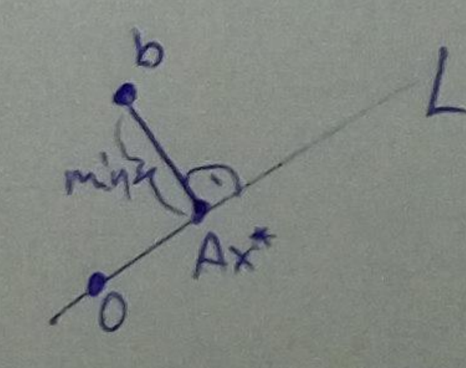
ismeretlenek

kezdeti érték

$$|b - Ax|^2 = \sum_{j=1}^{m} \big(p(x_j) - b_j\big)^2 \to \min$$

$\boxed{\min |b - Ax| = ?}$ $\quad x = ?$

L: A mátrix képtere $\quad L = A\cancel{x}, \; x \in \mathbb{R}^n$



minimális a hiba, ha $b - Ax^* \perp L$

$\langle Ax^* - b, y \rangle = 0, \quad \forall y \in L$

$\langle Ax^* - b, Ax \rangle = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$\to \langle A^T \cdot (Ax^* - b), x \rangle = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$

$A^T \cdot (Ax^* - b) = 0$ $\qquad \boxed{A^T \cdot A \cdot x^* = A^T \cdot b}$

van megoldás, ha $A^T A$ reguláris, rang(A) maximális

Newton módszer

Pl. $\sqrt{2}$ értéke

$$x^2 = 2$$

$x^2 - 2 = 0$ egyenlet, visszavezetjük zérushely keresésre

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k} = x_k - \frac{x_k}{2} + \frac{1}{x_k}$$

$x_{k+1} = \dfrac{x_k}{2} + \dfrac{1}{x_k}$ iterációs egyenlet, ellenőrzés: $\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ✓

Legyen $x_0 = 1,4$ (jól megválasztott kezdeti érték) $\quad (e_0 = \sqrt{2} - 1,4 = 0,0142)$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^2 - 2}{2x_0} = \frac{x_0}{2} + \frac{1}{x_0} = \frac{1,4}{2} + \frac{1}{1,4} = 1,4142$$

$(e_1 = \sqrt{2} - 1,4142 = 1,3562 \cdot 10^{-5})$

$$x_2 = \frac{1,4142}{2} + \frac{1}{1,4142} = 1,41421356$$

$(e_2 = 2,3731 \cdot 10^{-9})$

....

Hiba becslése: vegyük a $[1,4 ; 1,5]$ intervallumot

$$\min|f'| = m = \min|2x| = 2,8$$

$$\max|f''| = M = 2$$

$$\rightarrow e_{k+1} \leq \frac{2}{2 \cdot 2,8} \cdot e_k^2$$

$\max|e_0| = 0,1 \quad (1,4 - 1,5)$

$\max|e_1| = \dfrac{2}{5,6} \cdot 0,1^2 = 0,003571$

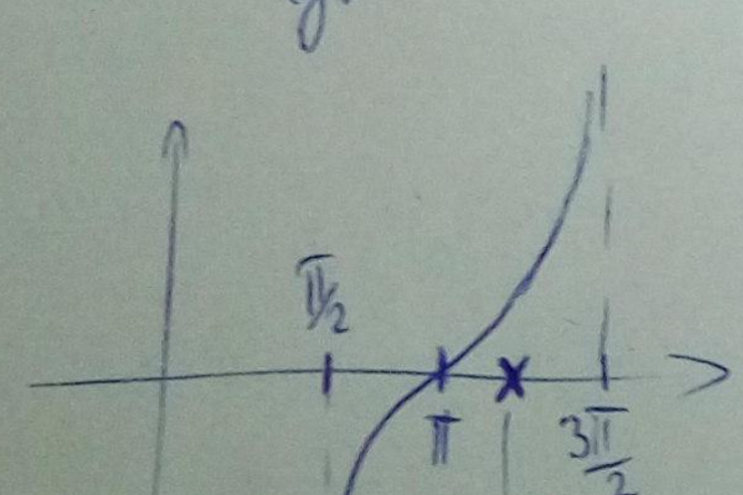
$\max|e_2| = \dfrac{2}{5,6} \cdot 0,003571^2 = 4,5543 \cdot 10^{-6}$

...

Pl. π kiszámítása

$tg(\pi) = 0$ alapján

$$x_{k+1} = x_k - \frac{tg(x_k)}{\frac{1}{\cos^2(x_k)}} = x_k - \sin(x_k) \cdot \cos(x_k) = x_k - \frac{\sin(2x_k)}{2}$$



$$tg'(x_k) = \frac{1}{\cos^2(x_k)}$$

$$m = \min_{[\pi ; 3,2]} |f'(x)| = \frac{1}{\cos^2(\pi)} = 1$$

$$x_1 = 3,2 - \frac{\sin(6,4)}{2} = 3,14173$$

$$x_2 = 3,14159$$

...

Newton egyenletrendszer

$$\boxed{\begin{aligned} &J(x_k)\cdot(x_{k+1}-x_k) = -F(x_k) \\ &J_F = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{n\times n}\end{aligned}}$$

Pl. F:
$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 3 \\ x^2+y^2-z &= 1 \\ x+y+z &= 3 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} x^2+y^2+z^2-3 &= 0 \\ x^2+y^2-z-1 &= 0 \\ x+y+z-3 &= 0 \end{aligned}$$

Kezdeti érték: $\underline{x_0} = (1;0;1)$ — $x\ y\ z$

$$\left(\text{Pontos megoldás: } \underline{x}^* = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$J = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \uparrow\ \ \ \uparrow\ \ \ \uparrow \\ \partial x\ \ \partial y\ \ \partial z \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow 1.\text{ egyenlet} \\ \leftarrow 2.\text{ egyenlet} \\ \leftarrow 3.\text{ egyenlet} \end{array}$$

$$\underline{x_0} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{J(\underline{x_0})\cdot(\underline{x_1}-\underline{x_0}) = -F(\underline{x_0})}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1-1 \\ y_1 \\ z_1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow -(1^2+0^2+1^2-3) \\ \leftarrow -(1^2+0^2-1-1) \\ \leftarrow -(1+0+1-3) \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2\cdot(x_1-1)+2\cdot(z_1-1) &= 1 \\ 2\cdot(x_1-1)-(z_1-1) &= 1 \\ x_1-1+y_1+z_1-1 &= 1 \end{aligned} \Longrightarrow \underline{x_1} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 3/4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

első iterált | hiba: $\underline{e_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$J(\underline{x_1})\cdot(\underline{x_2}-\underline{x_1}) = -F(\underline{x_1})$$

$$\begin{pmatrix} 10/4 & 6/4 & 2 \\ 10/4 & 6/4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_2-5/4 \\ y_2-3/4 \\ z_2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/8 \\ 1/8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{10}{4}\cdot\left(x_2-\frac{5}{4}\right)+\frac{6}{4}\cdot\left(y_2-\frac{3}{4}\right)+2\cdot(z_2-1) &= -\frac{1}{8} \\ \frac{10}{4}\cdot\left(x_2-\frac{5}{4}\right)+\frac{6}{4}\cdot\left(y_2-\frac{3}{4}\right)-1\cdot(z_2-1) &= -\frac{1}{8} \\ 1\cdot\left(x_2-\frac{5}{4}\right)+1\cdot\left(y_2-\frac{3}{4}\right)+1\cdot(z_2-1) &= 0 \end{aligned} \Longrightarrow \underline{x_2} = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} \\ \frac{7}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$$

második iterált

hiba: $\underline{e_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ 0 \end{pmatrix}$

Banach fixpont

$T: X \to X \quad X$: Banach

T kontrakció: $\forall a,b \in X,\ \rho(T(a),T(b)) \le q \cdot \rho(a,b),\ 0<q<1$

$\Downarrow$

$\exists!\, x^* \in X:\ T(x^*) = x^*$

iteráció: $x_{k+1} = T(x_k),\ \forall x_0 \in X$

Pl. $T: C[0,1] \to C[0,1]$

$Tf = \int_0^x f(t)\,dt$ kontrakció-e?

Nem kontrakció:

legyen $f=1$, $g=2$ $\quad \rho(f,g)=1$

$T1 = x$

$T2 = 2x \quad \rho(T1,T2) = x$

$\max_{[0,1]}(x) = 1$

$1 \le q \cdot 1,\ 0<q<1$

Nincs ilyen q, nem kontrakció!

~~De T^2 kontrakció: $T(Tf) = \int_0^x \int_0^x f(t)\,dt\,dx$~~ De fixpont van, konstans nulla.

Interpoláció

Pl. $f_1 = x \quad f_2 = x^2 \quad f_3 = e^x$ ← lineáris függetlenek

$p = ax + bx^2 + c \cdot e^x$ alakban keressük

$p(0)=1 \quad p(1)=0 \quad p(-1)=2$ ← kezdeti értékek, 3 helyen történt mérés

$(x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=-1)$

$y_1=1 \quad y_2=0 \quad y_3=2$

$(p(x)=y)$

$$\boxed{p(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot \frac{L_j(x)}{U\begin{pmatrix} f_1 \dots f_n \\ x_1 \dots x_n \end{pmatrix}}}$$

$$U\begin{pmatrix} f_1 \dots f_n \\ x_1 \dots x_n \end{pmatrix} = \det f_j(x_i) = \det \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_2(x_n) \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \dots & f_n(x_n) \end{pmatrix}$$

$$L_j(x) = U\begin{pmatrix} f_1 \dots f_n \\ x_1 \dots \underset{x}{\wedge} \dots x_n \end{pmatrix}$$

j. oszlopban x_j helyett x

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ e^{x_1} & e^{x_2} & e^{x_3} \end{vmatrix}$$

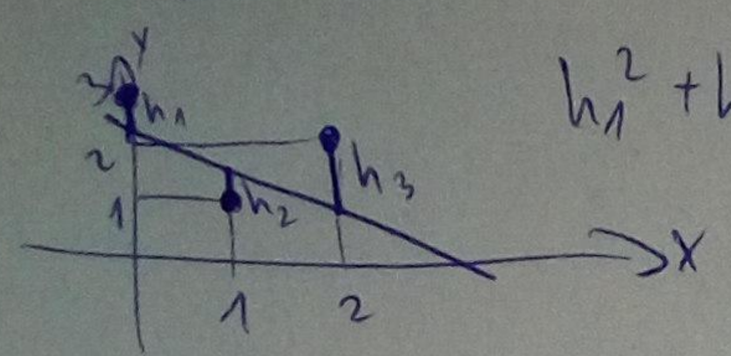
(U esetén behelyettesítünk mindent
L_j esetén j. oszlop marad x-es)

$$p(x) = \overset{y_1}{1} \cdot \frac{\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ x^2 & 1 & 1 \\ e^x & e & 1/e \end{vmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & e & 1/e \end{vmatrix}}_{\to 2}} + \overset{y_2}{0} \cdot \dots + \overset{y_3}{2} \cdot \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & x^2 \\ 1 & e & e^x \end{vmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & e & 1/e \end{vmatrix}}_{\to 2}}$$

$$p(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ x^2 & 1 & 1 \\ e^x & e & 1/e \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & x^2 \\ 1 & e & e^x \end{vmatrix}}_{x^2-x} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{1}{e} - e\right) \cdot x - x^2 \cdot \left(\frac{1}{e} + e\right) + 2 \cdot e^x \right) + x^2 - x$$

Interpolácio $n \neq m$ **Pl.** $p = ax + b$ $f_1 = 1$, $f_2 = x$ bázisok $b = ?$, $a = ?$



$h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 \to \min$

$p(0) = 3$

$p(1) = 1$

$p(2) = 2$

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow x_1 \\ \leftarrow x_2 \\ \leftarrow x_3 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ 1 & x \end{array} & \end{array} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^T A x^* = A^T b}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ \leftarrow 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \left. \begin{array}{l} 3x_1 + 3x_2 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 = 5 \end{array} \right\}$$

$$2x_2 = -1$$

$$\underline{x_2 = -\frac{1}{2}} \quad \to \underline{x_1 = \frac{5}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{p(x) = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}}$$

$x = 0 : 2{,}5$ (hiba 0,5)

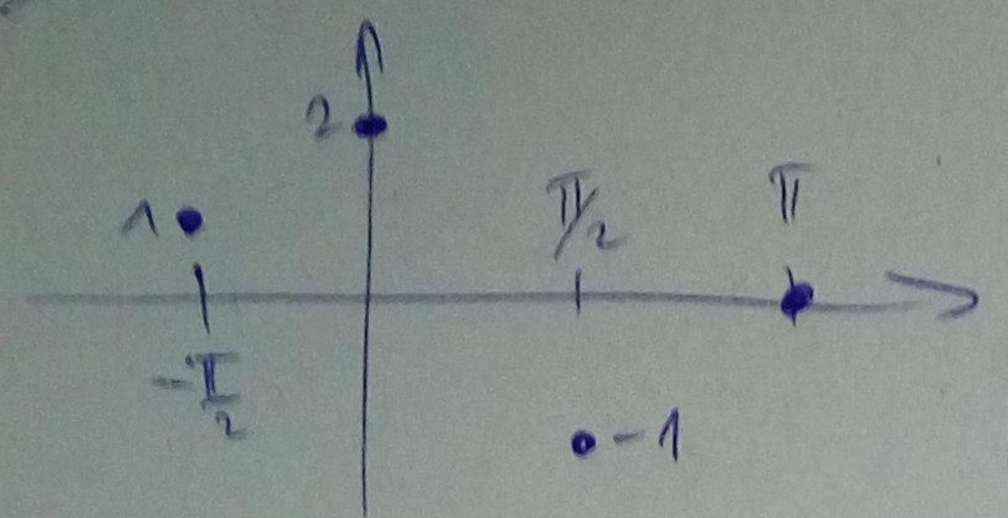
$x = 1 : 2$ (hiba 1)

$x = 2 : 1{,}5$ (hiba 0,5)

4

Interpoláció:

Pl. $p(x) = a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x) + c$



$$A = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow -\frac{\pi}{2} \\ \leftarrow 0 \\ \leftarrow \pi/2 \\ \leftarrow \pi \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \cos & \sin & \text{constant} \end{array} & \end{array}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \underline{x}^* = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{x}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$p(x) = \cos(x) - \sin(x) + 1/2$$

$-\pi/2$: $3/2$ (hiba $1/2$)

0 : $3/2$ (hiba $1/2$)

$\pi/2$: $-1/2$ (hiba $1/2$)

π : $-1/2$ (hiba $1/2$)

Integ HÁZI

Pl. (1.) $f(x)=(4+2x)\cdot e^{-\frac{x}{2}}$, $x\in[0,6]$ kontrakció-e?

Ha $|f'(x)|\leq q<1$, $\forall x\in[a,b] \Rightarrow f$ kontrakció

$$f'(x)=\cancel{4\cdot e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}+2x\cdot e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\cancel{2\cdot e^{-\frac{x}{2}}}=-x\cdot e^{-\frac{x}{2}}\leq 0 \quad [0,6]\text{-on}$$

(monoton csökken)

Kritikus pontok: – intervallum szélei

– ahol a derivált nulla:

$$\left(|f'(x)|\right)'=\left(x\cdot e^{-\frac{x}{2}}\right)'=e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(1-\frac{x}{2}\right)=0$$

$x=2$-nél

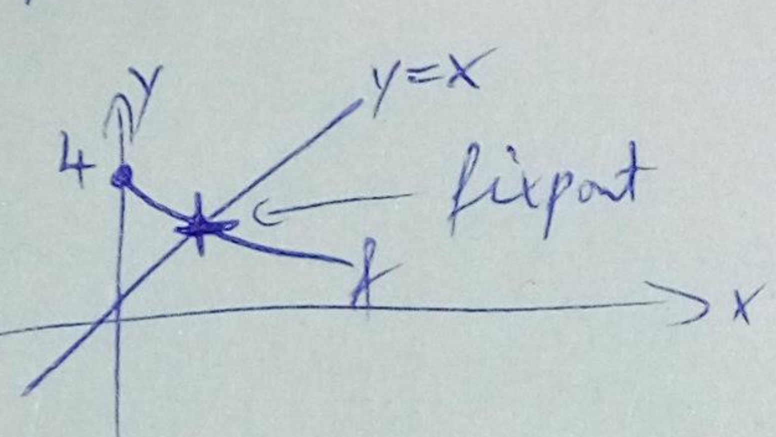
x	0	6	2
$\lvert f'(x)\rvert$	0	$\frac{6}{e^3}$	$\frac{2}{e}$

$\frac{2}{e}$ a legnagyobb, de ez is kisebb 1-nél $\Downarrow$ kontrakció ✓

Banach – fixpont

$f:[a,b]\to[a,b]$ és kontrakció $\Downarrow$ pontosan egy fixpont

$[0,6]\to[0,6]$ ✓ csak $[0,4]$-be képez, de az ~~...~~ benne van $[0,6]$-ban



$x=0$ helyen 4 és monoton csökken

3. iteráció után mekkora a hiba? $e_3=q^3=\left(\frac{2}{e}\right)^3$

$$e_k=|x_k-x_0|\leq q^k\cdot|x_1-x_0|$$

② HÁZI
Newton 2 iteráció

$$\left.\begin{array}{l} x - y - e^{y} = 0 \\ x^{3} - 2x + 1 = 0 \end{array}\right\}$$

kezdeti érték: $\begin{array}{cc} x_0 & y_0 \\ \left(\frac{1}{2}\right. ; & \left.\frac{1}{2}\right) \end{array}$

$$(J_F)_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & -1 - e^{y} \\ 3x^2 - 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{1. egyenlet} \\ \leftarrow \text{2. egyenlet} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \partial x & \partial y \end{array}$$

$$J(x_k)\cdot(x_{k+1} - x_k) = -F(x_k) \qquad J(x_0) = \begin{pmatrix} 1 & -1-\sqrt{e} \\ -1{,}25 & 0 \end{pmatrix} \qquad -1-\sqrt{e} \approx -2{,}65$$

első iteráció, k=0

$$\begin{pmatrix} 1 & -2{,}65 \\ -1{,}25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ y - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}65 \\ -0{,}125 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - e^{\frac{1}{2}}\right) \\ \leftarrow -\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2\cdot\frac{1}{2} + 1\right) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right) - 2{,}65\cdot\left(y - \frac{1}{2}\right) = 1{,}65 \\ -1{,}25\left(x - \frac{1}{2}\right) + 0 \quad = -0{,}125 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0{,}6 \\ y_1 = -0{,}085 \end{array}$$

k=1:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2{,}65 \\ -1{,}25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 0{,}6 \\ y + 0{,}085 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}23 \\ -0{,}02 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow -\left(0{,}6 + 0{,}085 - e^{-0{,}085}\right) \\ \leftarrow -\left(0{,}6^3 - 2\cdot 0{,}6 - 1\right) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1\cdot(x - 0{,}6) - 2{,}65\cdot(y + 0{,}085) = 0{,}23 \\ -1{,}25\cdot(x - 0{,}6) + 0 \quad = -0{,}02 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = 0{,}62 \\ y_2 = -0{,}17 \end{array}$$

HÁZI

3. $x^3+2x+1=0$, $x_0=0$ Newton

Hány iteráció után lesz a hiba $< 10^{-5}$?

$f' = 3x^2+2 > 0 \implies \min|f'| = m = 2$

$e_0 = \frac{1}{2}$ (intervallum hossz) (Pontos megoldás: $-0{,}45340$)

$[-\frac{1}{2}; 0]$ kezdő intervall

$f'' = 6x$ $\quad \max_{[-\frac{1}{2};0]} |f''| = 3$

$e_1 = \frac{M}{2m} \cdot e_0^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$

$e_2 = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{16}\right)^2 = 0{,}026367$

$e_3 = 0{,}00052142$

$e_4 = 2{,}0391 \cdot 10^{-7} \rightarrow$ 4. lépés után

HÁZI

4.

8