Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA06)

2. ZH javítókulcs (2016. 03. 21.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Cégünknek két, kedvező adózási környezetet biztosító országban (A-ban és B-ben) vannak bankszámlái, az igazgatótanács minden tagja pedig pontosan egy A-beli és pontosan egy B-beli bankszámlához fér hozzá. Mindemellett az igazgatótanács minden t tagjához tartozik egy $c(t)$ szám, ami azt mutatja meg, hogy legalább hány milliónak kell lennie azon két bankszámla összegyenlegének, amelyekhez a t tag hozzáfér. Célunk, hogy a cég bankszámláin úgy helyezzünk el összegeket, hogy teljesüljön az előző feltétel, továbbá, a bankszámlákon elhelyezett össztőke a lehető legkisebb legyen. Írjunk fel egy LP feladatot, aminek az optimális megoldása azt mutatja meg, mekkora összeget kell az egyes számlákra elhelyezni ahhoz, hogy elérjük a fenti célt. Ha minden egyes számlára csak egymillió forint többszörösét tudjuk elhelyezni, és minden $c(t)$ érték is egymillió többszöröse, akkor elegendő-e lesz-e az előző LP által megtalált optimális megoldáshoz felhasznált teljes összeg a számlák ilyetén feltöltéséhez?

Készítsünk el egy G páros gráfot, melynek csúcsai az A-ban ill. B-ben vezetett bankszámlák, élei pedig az igazgatótanács tagjainak felelnek meg, és azon bankszámlákat köti össze, amelyekhez az adott tanácstag hozzáfér. Minden v bankszámlához tartozik egy $x(v)$ változó, ami az adott bankszámla egyenlegét jelenti millió forintban számítva. (3 pont)
Az bankszámlák összegyenlegét kell minimalizálnunk a feladatban leírt feltétel mellett. Ez az alábbi LP-vel írható le:

$$\min \mathbb{1}\cdot x = \min \sum_{v\in V(G)} x(v) \qquad \text{ha } \mathbf{0} \le x \in \mathbb{R}^{V(G)}$$
$$x(u)+x(v) \ge c(uv) \qquad \forall uv \in E(G)$$

(1 pont)
Az fenti LP-ben az együtthatómátrix a G páros gráf incidenciamátrixának transzponáltja, (1 pont)
ezért az órán tanultak szerint TU tulajdonságú. (2 pont)
A TU mátrixokról tanultak szerint ha a fenti LP-ben szereplő minden változóra egészértékűséget írunk elő, továbbá minden $c(t)$ érték is egész, akkor az így kapott ILP feladat optimumára a célfüggvény értéke megegyezik a fenti LP probléma optimális célfüggvényértékével. (2 pont)
Ezért a feladat kérdésere igenlő a válasz. (1 pont)

---

2. Legyen $G=(V,E)$ páros gráf, és azokat az élhalmazokat nevezzünk *függetlennek*, amelyek párosítást alkotnak a G gráfban, azaz

$$\mathcal{F} := \{F \subseteq E : \text{az } F\text{-beli éleknek nincs közös csúcsa}\} .$$

Igaz-e, hogy $\mathcal{M}=(E,\mathcal{F})$ minden esetben matroid?

A függetlenségi axiomák teljesülését kell ellenőrizni az $\mathcal{F}$ rendszerre. (1 pont)
Az F(3) axioma nem teljesül, mert alkalmas páros gráfban megadható egy kisebb és egy nagyobb párosítás úgy, hogy a nagyobb egyik éle se legyen diszjunkt a kisebb minden élétől. (4 pont)
Ez a helyzet pl. egy 3-élű út két szélső ill. középső élével. (4 pont)
Nem igaz tehát, hogy $\mathcal{M}$ mindig matroid. (1 pont)

Aki bizonyítja, hogy (F1) és (F2) teljesül, de nem foglalkozik (F3)-mal, az kapjon 1+2 pontot. Az is teljes értékű megoldás, ha egy páros gráf olyan élsúlyozására mutatunk példát, amire a mohó algoritmus nem maximális súlyú párosítást választ ki. Ilyen pl. ha az iménti 3 hosszú út éleinek súlyai sorra $2, 4$ és 3.

---

3. A jobb oldalon látható mátrix oszlopai alkotják az $\mathcal{M}$ lineáris matroidot. Az egyes oszlopok súlya (balról jobbra haladva) rendre $13, 11, 7, 5, 3$ és 2. Határozzuk meg $\mathcal{M}$ egy maximális súlyú bázisát, amit jelöljünk B-vel. Van-e $\mathcal{M}$-nek olyan köre, ami tartalmazza B minden elemét?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ -4 & -8 & -1 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

A feladatban említett bázis meghatározható a mohó algoritmussal, (1 pont)
ám hogy ezt könnyen elvégezhessük, elemi sorekvivalens átalakításokkal lépcsős alakra hozzuk a mátrixot, hisz ettől az oszlopok alkotta lineáris matroid nem változik. (1 pont)
Mivel az oszlopok szerencsésen csökkenő súlysorrendben szerepelnek, gondosan ügyelve a precíz másolásra, rögvest neki is látunk a feladatnak.

$$\begin{array}{rrrrrr}
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & -2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
2 & 4 & 0 & -2 & -1 & 3 \\
-4 & -8 & -1 & 3 & 4 & 0 \\ \hline
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -2 & -2 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ \hline
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ \hline
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
\end{array}$$

(3 pont)

A kapott mátrixból kell balról jobbra haladva mohó algoritmussal kiválasztani a független oszlopokat. Ahogy a gyakorlaton is láttuk, pontosan a vezéregyest tartalmazó oszlopokat fogjuk választani, (2 pont)
konkrétan az első, harmadik, ötötdik és hatodik oszlopokat. Ezek alkotják tehát B-t. (1 pont)
Mivel ezen oszlopokon kívüli két oszlop mindegyikét generálja az első és a harmadik oszlop, ezért az $\mathcal{M}$ matroidnak nincs olyan köre, ami tartalmazza a szóban forgó B bázist. (2 pont)