ANALÍZIS 1. | **II. Zárthelyi** | **2018. november 22.**
Mérnökinformatikus szak | β-variáns | Munkaidő: 75 perc

---

1. feladat (12 pont)
Hol és milyen típusú szakadásai vannak az alábbi függvénynek?

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3} + \frac{x + 2}{|x + 2|}$$

Mivel f folytonos függvények hányadosának összege, így a nevezők zérushelyein kívül a függvény folytonos. (**2p**)

$$\lim_{x\to-2\pm} f(x) = \frac{-5}{15} + \lim_{x\to-2\pm} \frac{x+2}{|x+2|} = -\frac{1}{3} \pm 1,$$

így ay $x = -2$ pontban a függvénynek véges ugrása van. (**3p**) $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ (**1p**),

$$\lim_{x\to3} f(x) = \lim_{x\to3} \left(\frac{(x-3)(x+3)}{(x-1)(x-3)} + \frac{x+2}{|x+2|} \right) = \lim_{x\to3} \frac{x+3}{x-1} + 1 = 4,$$

így az $x = 3$ pontban a függvénynek megszüntethető szakadása van. (**3p**)

$$\lim_{x\to1\pm} f(x) = \lim_{x\to1\pm} \frac{x+3}{x-1} + 1 = \pm\infty,$$

így az $x = 1$ pontban a függvénynek másodfajú szakadása van. (**3p**)

---

2. feladat (4+12 pont)
a) Definiálja a valós értékű f függvény x_0 pontbeli deriváltját! (x_0 az értelmezési tartomány belső pontja.)
b) Deriválja az $|x+1| \cdot \sin(2x+2)$ függvényt értelmezési tartománya minden pontjában.

---

a) $f'(x_0) = \lim_{h\to0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, (**4p**)
b) $x > -1$ esetén: $((x+1)\sin(2x+2))' \overset{\mathbf{4p}}{=} \sin(2x+2) + 2(x+1)\cos(2x+2)$
$x < -1$ esetén: $(-((x+1)\sin(2x+2))' \overset{\mathbf{4p}}{=} -\sin(2x+2) - 2(x+1)\cos(2x+2)$
$x = -1$ esetén $\lim_{h\to0} \frac{|h|\sin(2h)}{h} = \lim_{h\to0} 2|h| \cdot \frac{\sin(2h)}{2h} = 0$. (**4p**)

---

3. feladat (9+9+9+9 pont)
Számolja ki az alábbi határértékeket

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arsh}(3x^2)}{\operatorname{arctg}(5x^2)},\qquad b)\ \lim_{x\to -1}\left(\frac{x}{x+1}+\frac{1}{\ln(2+x)}\right),$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{2\sin^2 x}},\qquad d)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{ch}(3x+2)}{\operatorname{sh}(3x-4)}$$

---

a) A határérték $\frac{0}{0}$ típusú (**1p**), tehát

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arsh}(3x^2)}{\operatorname{arctg}(5x^2)}\overset{\mathbf{6p}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{6x}{\sqrt{1+9x^4}}}{\frac{10x}{1+25x^4}}\overset{\mathbf{2p}}{=}\frac{3}{5}.$$

b) A bal ill. jobb oldali határérték $\mp(-\infty+\infty)$ típusú (**1p**), tehát

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{x}{x+1}+\frac{1}{\ln(2+x)}\right)\overset{\mathbf{1p}}{=}\lim_{x\to -1}\frac{x\ln(2+x)+x+1}{(x+1)\ln(2+x)}\overset{\mathbf{3p}}{=}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\ln(2+x)+\frac{x}{2+x}+1}{\ln(x+2)+\frac{x+1}{x+2}}\overset{\mathbf{3p}}{=}\lim_{x\to -1}\frac{\frac{1}{x+2}+\frac{x+2-x}{(x+2)^2}}{\frac{1}{x+2}+\frac{x+2-(x+1)}{(x+2)^2}}\overset{\mathbf{1p}}{=}\frac{3}{2}.$$

c) A határérték 1^∞ típusú (**1p**), tehát

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{2\sin^2 x}}\overset{\mathbf{2p}}{=}\lim_{x\to 0}\left(e^{\ln\cos x}\right)^{\frac{1}{2\sin^2 x}}\overset{\mathbf{2p}}{=}e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{2\sin^2 x}}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{2\sin^2 x}\overset{\mathbf{2p}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{4\sin x\cos x}\overset{\mathbf{1p}}{=}-\frac{1}{4},$$

vagyis

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{2\sin^2 x}}\overset{\mathbf{1p}}{=}\frac{1}{\sqrt[4]{e}}.$$

d) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{ch}(3x+2)}{\operatorname{sh}(3x-4)}\overset{\mathbf{3p}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^{3x+2}+e^{-(3x+2)}}{e^{3x-4}-e^{-(3x-4)}}\overset{\mathbf{3p}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^2+e^{-(6x+2)}}{e^{-4}-e^{-(6x-5)}}\overset{\mathbf{3p}}{=}\frac{e^2}{e^{-4}}=e^6.$$

---

4. feladat (18 pont)
Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, melyeken az $f(x) = (x^2 - 8)e^{-x}$ függvény szigorúan monoton. Határozza meg a függvény maximumát, illetve minimumát a $[0, 5]$ intervallumon, amennyiben létezik.

$f'(x) \overset{\mathbf{2p}}{=} (2x - x^2 + 8)e^{-x} \overset{\mathbf{2p}}{=} -(x-4)(x+2)e^{-x}$. $f'(x) > 0$, ha $-2 < x < 4$, (**2p**), tehát f szigorúan monoton növő a $(-2, 4)$ intervallumon (**2p**), és $f'(x) < 0$, ha $x < -2$ vagy $x > 4$ (**2p**), tehát f szigorúan monoton csökkenő a $(-\infty, -2)$ és $(4, \infty)$ intervallumokon (**2p**). f folytonos, tehát a Weierstrass-tétel miatt felveszi a minimumát és a maximumát minden korlátos, zárt intervallumon (**2p**). Mivel ezeket az intervallumban található lokális szélsőértékhelyeken, vagy az intervallum szélein veszi fel, és $f(0) = -8 < 0$, $f(4) = \frac{8}{e^4} > f(5) = \frac{17}{e^5} > 0$, (mivel $e > \frac{17}{8}$, vagy mert f monoton csökken a $[4, 5]$ intervallumon), így a függvény maximuma a $[0, 5]$ intervallumon $\frac{8}{e^4}$, minimuma pedig -8. (**4p**).

---

5. feladat (18 pont)
A kétszer differenciálható $y = y(x)$ átmegy az $x_0 = -1$, $y_0 = -1$ ponton és x_0 egy környezetében kielégíti az alábbi implicit egyenletet:

$$y^3 + y^2 - x^2 + 2x = -3.$$

Határozza meg ezen függvény $(-1, -1)$ pontjabeli érintőegyenesének egyenletét! Van-e inflexiója a függvénynek az $x_0 = -1$ pontban?

Deriválva az egyenletet: $3y^2y' + 2yy' - 2x + 2 = 0$, (**3p**) vagyis az $(-1, -1)$ pontban $3y' - 2y' + 2 + 2 = 0$ (**2p**), tehát $y'(1) = -4$ (**1p**). Az érintőegyenes tehát áthalad az $(-1, -1)$ ponton, meredeksége -4, így egyenlete: $y = -1 - 4(x + 1)$ (**3p**). Inflexiós pont létezéséhez a második deriváltat vizsgáljuk, vagyis újabb deriválással: $6y(y')^2 + 3y^2y'' + 2(y')^2 + 2yy'' - 2 = 0$ (**4p**), azaz a $(-1, -1)$ pontban $-96 + 3y'' + 32 - 2y'' - 2 = 0$ (**2p**), tehát $y''(-1) = 66 \neq 0$, (**1p**) így nincs inflexiója a függvénynek az $x_0 = -1$ pontban (**2p**).

IMSC feladat (8 IMSC pont)
Igazolja, hogy páratlan függvény deriváltja páros, páros függvény deriváltja páratlan. Mit mondhatunk ez alapján a páros, illetve páratlan függvények monotonitásáról, illetve konvexitásáról?

A feladat megoldása azonos az α variánséval.