Elektromágneses terek alapjai (VIHVAC03) $\boxed{\text{A}}$ **2021. november 19.**

Nagypéldák. (Az egyes nagypéldákat külön lapokon, *áttekinthetően* dolgozza ki.)

1. példa. Egy merőlegesen metsződő földelt fémsíkok által alakított sarokban egy $R = 5\,\text{cm}$ sugarú, $q = -10\,\text{nC/m}$ hosszegységre eső töltéssűrűséggel ellátott igen hosszú fémhenger helyezkedik el az ábrán látható módon az egyes síkoktól $a = 1\,\text{m}$ és $b = 1{,}5\,\text{m}$ távolságra. A közeg levegő.

a) Vegyen fel olyan ekvivalens töltéselrendezést, melynek elektromos tere megegyezik a fémlemezek és a töltés által létrehozott térrel! *(1 pont)*

> Helyes ábra. (1 p)

b) Mekkora és milyen irányú erő hat a henger $l = 10\,\text{m}$ hosszúságú szakaszára? Az irányt elegendő az a) feladat ábráján jelölni! *(3 pont)*

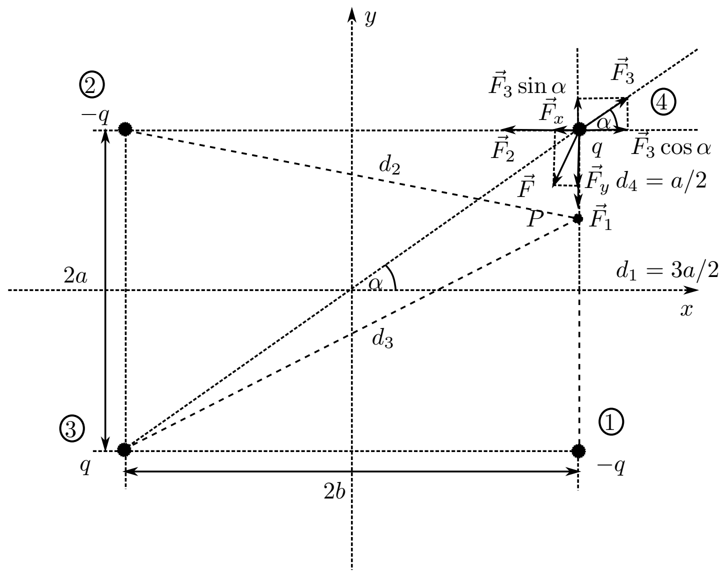
> Az eredő erő helyes formulája: $F = \sqrt{(F_1 + F_3 \sin\alpha)^2 + (F_2 + F_3 \cos\alpha)^2}$, (1 p)
>
> ahol $F_1 = \dfrac{-q^2 l}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{2a}$, $F_2 = \dfrac{-q^2 l}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{2b}$ és $F_3 = \dfrac{q^2 l}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{\sqrt{(2a)^2 + (2b)^2}}$.
>
> A végeredmény: $F = 6{,}49\,\mu\text{N}$. (1 p)
>
> Az ábrán az erő helyes feltüntetése. (1 p)

c) Határozza meg a potenciált az P pontban! *(3 pont)*

> A potenciál kifejezése:
>
> $$\phi_P = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left[-\ln\left(\frac{r_0}{d_1}\right) - \ln\left(\frac{r_0}{d_2}\right) + \ln\left(\frac{r_0}{d_3}\right) + \ln\left(\frac{r_0}{d_4}\right)\right],$$
>
> ahol $d_1 = \dfrac{3a}{2}$, $d_2 = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + (2b)^2}$, $d_3 = \sqrt{\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2 + (2b)^2}$, $d_4 = \dfrac{a}{2}$. (2 p)
>
> A végeredmény: $\phi_P = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{d_1 d_2}{d_3 d_4}\right) = -179{,}97\,\text{V}$. (1 p)

d) Határozza meg a feszültséget a henger és a fémsíkok között! *(3 pont)*

> A feszültség kifejezése:
>
> $$U = \phi - 0 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(\frac{r_0}{R}\right) - \ln\left(\frac{r_0}{2b}\right) + \ln\left(\frac{r_0}{\sqrt{(2a)^2 + (2b)^2}}\right) - \ln\left(\frac{r_0}{2a}\right)\right].$$ (2 p)
>
> A végeredmény: $U = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{4ab}{R\sqrt{(4a^2 + 4b^2)}}\right) = -630{,}33\,\text{V}$. (1 p)

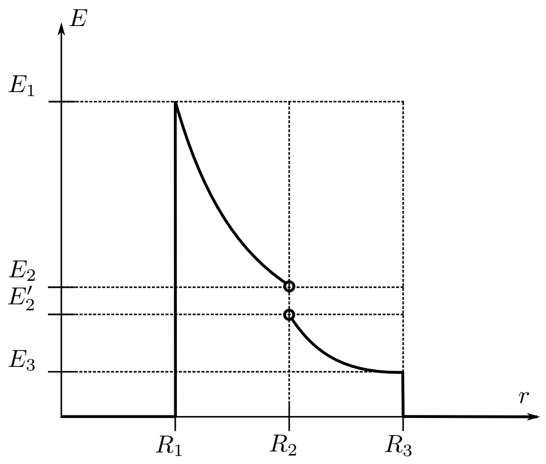


2. példa. Egy rétegzett gömbkondenzátor méretei: $R_1 = 1\,\text{mm}$, $R_2 = 3\,\text{mm}$, $R_3 = 5\,\text{mm}$. Az egyes rétegek dielektromos állandói és vezetőképességei rendre ε_1, ε_2, σ_1 és σ_2. A fegyverzetek közé kapcsolt feszültség $U = 1\,\text{kV}$, melyeken ennek hatására $+Q$, illetve $-Q$ nagyságú töltés halmozódik fel, ahol $Q = 330{,}3\,\text{pC}$.

Tekintsük a két réteget tökéletes szigetelőnek ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$), továbbá legyen $\varepsilon_1 = 2{,}25$ és $\varepsilon_2 = 3{,}3$!

a) Adja meg és ábrázolja a sugár függvényében az elektromos térerősség nagyságát a dielektrikumban (az $R_1 < r < R_3$ tartományon)! Az ábrán tüntesse fel a térerősségértékeket a határátmeneteken! *(3 pont)*

> A térerősség helyfüggése: (1 p)
>
> $$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\dfrac{1}{r^2}, & \text{ha } R_1 < r < R_2, \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2}\dfrac{1}{r^2}, & \text{ha } R_2 < r < R_3. \end{cases}$$
>
> Az elektromos eltolás folytonos a határon, de a térerősség ugrik.
>
> A határátmeneti értékek:
>
> $E_1 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\dfrac{1}{R_1^2} = 13{,}2\,\frac{\text{kV}}{\text{cm}}$, $E_2 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\dfrac{1}{R_2^2} = 1{,}47\,\frac{\text{kV}}{\text{cm}}$,
>
> $E_2' = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2}\dfrac{1}{R_2^2} = 1\,\frac{\text{kV}}{\text{cm}}$, $E_3 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2}\dfrac{1}{R_3^2} = 0{,}36\,\frac{\text{kV}}{\text{cm}}$. (1 p)
>
> Kvalitatíve helyes ábra. (A következő oldalon található ábra nem méretarányos.) (1 p)



b) Legfeljebb mekkora feszültség kapcsolható a kondenzátorra úgy, hogy a térerősség ne lépje túl a kritikus értéket egyik dielektrikumban se, ha az egyes rétegek átütési szilárdsága rendre $E_{1,\mathrm{krit}} = 200\,\mathrm{kV/cm}$ és $E_{2,\mathrm{krit}} = 250\,\mathrm{kV/cm}$! *(4 pont)*

I. megoldás:
Mivel a térerősség az ε_1 permittivitású közegben a nagyobb – lásd a) feladat ábrája – és a kritikus térerősség is kisebb, így biztosan itt fog először megtörténni az átütés. A legnagyobb térerősség az R_1 sugarú fegyverzeten lép fel. (2 p)
A feladat lineáris és az a) feladat szerint E_1 térerősség U feszültség mellett adódik, így a maximális feszültség: $U_{\max} = \dfrac{E_1}{E_{1,\mathrm{krit}}} U = 15{,}15\,\mathrm{kV}$. (2 p)
II. megoldás:
A kapacitás meghatározása a feladat szövegének segítségével: $C = \dfrac{Q}{U} = 0{,}33\,\mathrm{pF}$, a definíció alapján közvetlenül: $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0}{\dfrac{1}{\varepsilon_1}\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right) + \dfrac{1}{\varepsilon_2}\left(\dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R_3}\right)}$, vagy a két réteg soros kapcsolásával: $C = C_1 \times C_2$, ahol $C_i = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_i}{\dfrac{1}{R_i} - \dfrac{1}{R_{i+1}}}$ és $i = \{1, 2\}$. (2 p)
A maximális feszültség számítása: $E_{1,\max} = \dfrac{CU_{\max}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\dfrac{1}{R_1^2} \Rightarrow U_{\max} = 15{,}15\,\mathrm{kV}$. (2 p)

Legyen a továbbiakban $\sigma_1 = \sigma_2 = 10^{-13}\,\mathrm{S/m}$!

c) Határozza meg a szivárgási ellenállást! *(3 pont)*

I. megoldás:
Legyen $\sigma := \sigma_1 = \sigma_2$. Elektrosztatikai analógia alapján az egyes rétegek konduktanciája: $G_i = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_i} C_i$, ahol $i = \{1, 2\}$. (1 p)
Az eredő vezetés pedig soros kapcsolással kapható: $G = G_1 \times G_2$ (1 p)
A szivárgási ellenállás számítása: $G = \dfrac{I}{U} \Rightarrow R = \dfrac{1}{G} = \dfrac{\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_3}}{4\pi\sigma} = 636{,}62\,\mathrm{T\Omega}$. (1 p)
II. megoldás:
Az alábbi két összefüggés felhasználásával: $I = J(r)4\pi r^2$, $J(r) = \sigma E(r)$, (1 p)
majd a feszültség számítása a b) feladathoz hasonló módon. (1 p)
Végül az R ellenállás kifejezése. (1 p)

Kispéldák. (Minden helyes válasz 2 pontot ér. A végeredményt írja fel a feladatlapra, a *részletszámításokat – ahol szükséges – külön lapon* mellékelje.)
A helyes és teljes alapegyenletekre 1 pont, a numerikusan jó eredményre további 1 pont adható.

1. A σ fajlagos vezetőképességű közegben, egy nagy kiterjedésű fémsík fölött h magasságban egy $R \ll h$ sugarú vezeték helyezkedik el. Határozza meg a vezeték és a sík közötti hosszegységre eső vezetést!
$$G' = \frac{I'}{U} = \frac{2\pi\sigma}{\ln\left(\dfrac{2h}{R}\right)}$$

2. Egy 0,25 m hosszú koaxiális kábel ere sugarának és köpenye belső sugarának a különbsége 1 cm. Alkalmazható-e elektrosztatikus modell a hosszegységre eső kapacitás számítására, ha a kábelt 1 GHz-en szeretnénk használni? Válaszát indokolja!

   Igen, mert a c/f arány számottevően nagyobb a koaxiális kábel transzverzális irányú méreténél.

3. A levegőben két egyforma, R sugarú igen hosszú vezeték helyezkedik el egymástól $d \gg R$ távolságban, melyek ellentétes irányú I áramot szállítanak (Lecher-vezeték). Adja meg a l hosszú szakaszának önindukciós együtthatóját!
Segítség: alkalmazzon ésszerű közelítéseket!
$$L = L_\mathrm{k} + L_\mathrm{b} \approx L_\mathrm{k} = \frac{\mu_0}{\pi}\ln\left(\frac{d - R}{R}\right) \approx \frac{\mu_0}{\pi}\ln\left(\frac{d}{R}\right)$$

4. Elektrosztatikus térben, homogén térfogati töltéssűrűséggel ellátott, $\varepsilon_r = 1$ permittivitású szigetelő közegben a skalárpotenciál kifejezése V és m egységekben kifejezve $\phi(x) = -2x^2$. Határozza meg a térfogati töltéssűrűséget!
$$\rho = -\varepsilon\Delta\phi = 35{,}9\,\frac{\mathrm{pC}}{\mathrm{m}^3}$$

5. Egy igen hosszú villámáram-levezető és egy hurok közötti kölcsönös induktivitás $L_{12} = 5\,\mathrm{mH}$. A villámáram lineáris felfutású, $1\,\mu\mathrm{s}$ alatt 0-ról 10^5 A értékre emelkedik. Mekkora feszültség indukálódik eközben a hurokban?
$$U_\mathrm{i} = -L_{12}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -0{,}5\,\mathrm{GV}$$
A pozitív előjeles megoldás is elfogadható.