

Kiegészítés 3.

Perfekt Gráf Tétel: Egy gráf pontosan akkor perfekt, ha a komplementere perfekt.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a fenti állítás ekvivalens avval, hogy "Ha G perfekt, akkor a komplementere is perfekt."

A Perfekt Gráf Tétel bizonyítása helyett egy erősebb tételt bizonyítunk. (Ezt szintén Lovász László bizonyította valamivel a Perfekt Gráf Tételre adott eredeti bizonyításának megszületése után.)

Tétel (Lovász tétele): Egy G gráf akkor és csak akkor perfekt, ha minden G' feszített részgrájára teljesül, hogy

$$\alpha(G') \cdot \omega(G') \geq |V(G')|.$$

Megjegyzés: A fenti feltételt G helyett \bar{G} -re felírva nem történik más, mint az, hogy $\alpha(G)$ és $\omega(G)$ "szerepet cserél," hiszen $\alpha(\bar{G}) = \omega(G)$ és $\omega(\bar{G}) = \alpha(G)$. Ezért a Tétel állításából következik, hogy G pontosan akkor perfekt, ha \bar{G} perfekt, ami éppen a Perfekt Gráf Tétel állítása.

A most következő bizonyítás Gaspariantól származik.

A bizonyítást a következő tagolásban ismertetjük. Egy rövid előkészítő szakasz után a bizonyítás lényegi részét három lemma bizonyítására fogjuk bontani.

A bizonyítás előkészítése:

Az állítás azon része, hogy perfekt gráfok teljesítik a fenti egyenlőtlenséget majdnem nyilvánvaló: Ilyenkor minden G' feszített részgráfra $\chi(G') = \omega(G')$, $\alpha(G') \cdot \chi(G') \geq |V(G')|$ pedig tetszőleges G' gráfra igaz, hiszen $\chi(G')$ darab, egyenként legfeljebb $\alpha(G')$ méretű színosztály le kell tudja fedni az egész $V(G')$ szögponthalmazt. (Azt, hogy egy színosztály legfeljebb $\alpha(G')$ méretű onnan tudjuk, hogy az azonos színnel színezhető pontok mindig függetlenek, $\alpha(G')$ pedig éppen a legnagyobb független halmaz mérete G' -ben.)

Az állítás lényegi része tehát az, hogy amennyiben a fenti egyenlőtlenség egy gráf minden feszített részgrájára teljesül, akkor a gráf szükségképpen perfekt.

Egy gráfot imperfektnek fogunk hívni, amennyiben nem perfekt. Azt mondjuk, hogy G minimális imperfekt gráf, ha ő maga nem perfekt, de minden nála kisebb (azaz valódi) feszített részgrájja az. A perfektség definíciójából következik, hogy minden imperfekt gráf tartalmaz minimális imperfekt gráfot feszített részgráfként. Azt fogjuk igazolni, hogy ha G minimális imperfekt gráf, akkor $\alpha(G)\omega(G) < |V(G)|$, ebből következik, hogy imperfekt gráfokban nem teljesülhet az előbbi egyenlőtlenség fordítottja minden feszített részgráfra, ami épp az állítással ekvivalens.

Most kimondjuk és bebizonyítjuk az első lemmát.

1. Lemma: Ha G minimális imperfekt gráf, akkor csúcsainak tetszőleges $A \subset V(G)$ független halmazára

$$\omega(G - A) = \omega(G).$$

Az 1. Lemma bizonyítása: Legyen G a feltétel szerinti gráf, és tegyük fel indirekt, hogy $\omega(G - A) \neq \omega(G)$. Ez azt jelenti, hogy $\omega(G - A) < \omega(G)$. Viszont G minimális imperfekt volta miatt $(G - A)$ perfekt, így kiszínezhető $\omega(G - A)$ színnel. Eggyel több színnel viszont maga G is kiszínezhető, hiszen a $(G - A)$ -ban nem szereplő pontok független halmazt alkotnak, ti. éppen A -t. Ezért $\chi(G) \leq \chi(G - A) + 1 = \omega(G - A) + 1 \leq \omega(G)$ adódik, ahol az utolsó egyenlőtlenség az indirekt feltevés következménye. Ez viszont azt jelentené, hogy G maga is perfekt, hiszen nemcsak minden részgráfja, hanem ő maga is kiszínezhető annyi színnel, amennyi a benne levő legnagyobb klikk mérete. De G a feltétel szerint nem perfekt, így ellentmondásra jutottunk, ami bizonyítja a lemma állítását.

2. Lemma: Legyen G minimális imperfekt gráf. G függetlenségi számát jelölje α , klikkszámát ω . Ekkor megadható G független halmazainak egy $A_0, A_1, \dots, A_{\alpha\omega}$ és klikkjeinek egy $B_0, B_1, \dots, B_{\alpha\omega}$ rendszere úgy, hogy $\forall i$ -re $A_i \cap B_i = \emptyset$ és $\forall i \neq j$ -re $A_i \cap B_j \neq \emptyset$.

A 2. Lemma bizonyítása: Először megadunk egy $A_0, A_1, \dots, A_{\alpha\omega}$ és $B_0, B_1, \dots, B_{\alpha\omega}$ független halmazokból, illetve klikkekből álló rendszert, majd megmutatjuk, hogy ezek rendelkeznek a kívánt tulajdonsággal.

Legyen A_0 egy tetszőleges (de mostantól rögzített) maximális méretű független halmaz G -ben, vagyis $|A_0| = \alpha$. Az A_0 halmaz elemei legyenek a_1, \dots, a_α . Most tekintsük a $G - \{a_1\}$ gráfot. Ez perfekt és az 1. Lemma szerint ω a klikkszám. (Itt felhasználtuk, hogy egyetlen pont is független halmazt alkot, vagyis $\{a_1\}$ beírható az 1. Lemmában szereplő A független halmaz helyébe.) Mivel $G - \{a_1\}$ perfekt, ez azt jelenti, hogy a kromatikus száma is ω -val egyenlő. Tekintsük egy optimális színezését, és $A_1, A_2, \dots, A_\omega$ legyenek ennek a színezésnek a színsztályai. Hasonlóan definiáljuk az $A_{\omega+1}, \dots, A_{2\omega}$ független halmazokat mint a $G - \{a_2\}$ gráf egy optimális színezésének színsztályait. Általánosságban is legyenek $A_{(i-1)\omega+1}, A_{(i-1)\omega+2}, \dots, A_{i\omega}$ a $G - \{a_i\}$ perfekt gráf egy optimális színezésének színsztályai. (Az i itt befutja az $1, 2, \dots, \alpha$ számokat.)

Az 1. Lemma révén tudjuk, hogy tetszőleges független halmazt elhagyva G -ből a klikkszám nem csökken. Ebből következik, hogy minden fenti A_i -hez választható olyan B_i klikk, melynek nincsen közös pontja A_i -vel és mérete $\omega(G)$. Rögzítsünk egy ilyen B_i -t minden A_i -hez, ezzel megadtuk a $B_0, B_1, \dots, B_{\alpha\omega}$ klikkeket.

Tudjuk, hogy a megadás miatt minden $0 \leq i \leq \alpha\omega$ -ra $A_i \cap B_i = \emptyset$. Megmutatjuk, hogy ugyanakkor $i \neq j$ esetén mindig $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ teljesül. (Ebből egyébként azonnal következik, hogy ilyenkor $|A_i \cap B_j| = 1$, hiszen egy klikknek és egy független halmaznak legfeljebb egy közös pontja lehet.)

Tekintsük B_i -t és tegyük fel, hogy $A_0 \cap B_i = \emptyset$. Ekkor B_i az összes $G - \{a_i\}$ gráfban ω méretű klikk, így a $G - \{a_i\}$ gráf ω színnel történő színezésekor fellépő színsztályok mindegyike belemetsz. Ez pontosan annyit jelent, hogy $B_i \cap A_j \neq \emptyset$ minden $j \neq 0$ -ra. Eszerint az előbbi B_i csakis B_0 lehet, és valóban egyedül A_0 -tól diszjunkt.

Legyen most B_i olyan, hogy $A_0 \cap B_i \neq \emptyset$, s a két halmaz egyetlen közös eleme legyen a_k . Ekkor B_i továbbra is ω méretű klikk lesz minden olyan $G - \{a_j\}$ gráfban, amire $j \neq k$. Ezek ω színnel való színezésekor tehát B_i metszi az összes színsztályt. A $G - \{a_k\}$ gráfban pedig B_i -ből egy $\omega - 1$ méretű klikk marad meg, tehát ennek a gráfnak az ω színnel

történő színezésekor B_i egy kivételével minden színosztályt metsz. Ez azt jelenti, hogy az $A_0, A_1, \dots, A_{\alpha\omega}$ független halmazok közül B_i ismét csak pontosan egytől lehet diszjunkt, ez pedig akkor csakis az az A_i lehet, aminek párjául választottuk.

Ezzel beláttuk, hogy a két megadott halmazrendszer rendelkezik a kívánt tulajdonsággal, így a 2. Lemma is bizonyítást nyert.

3. Lemma: Legyenek A_1, A_2, \dots, A_m és B_1, B_2, \dots, B_m egy n -elemű halmaz részhalmazai, melyekre teljesül, hogy

$$\forall i \ A_i \cap B_i = \emptyset,$$

és

$$\forall i \neq j \ |A_i \cap B_j| = 1.$$

Ekkor $m \leq n$.

A 3. Lemma bizonyítása: Legyenek adva a lemma feltételeinek eleget tevő A_1, A_2, \dots, A_m és B_1, B_2, \dots, B_m részhalmazrendszerek.

Legyen \mathbf{A} az az m -szer n -es mátrix, amelynek sorai a A_i halmazok ún. karakterisztikus vektorai. Ez annyit jelent, hogy e mátrix i -edik sorának j -edik eleme 1, ha az alaphalmaz j -edik eleme benne van A_i -ben, és 0, ha nincs. Hasonlóan, legyen \mathbf{B} az az n -szer m méretű mátrix, melynek oszlopai a B_i halmazok karakterisztikus vektorai. (Tehát \mathbf{B} -ben az i -edik sor j -edik eleme 1, ha az alaphalmaz i -edik eleme benne van B_j -ben és 0, ha nincs benne.)

A $\mathbf{C} := \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ m -szer m -es mátrix i -edik sorának j -edik eleme éppen $|A_i \cap B_j|$ lesz. Az A_i -k és B_j -k feltételezett metsződési tulajdonságai szerint tehát \mathbf{C} olyan négyzetes mátrix, melyben a főátlóban csupa 0, azon kívül mindenütt 1 áll. Ebből következik, hogy \mathbf{C} teljes rangú, vagyis $rk(\mathbf{C}) = m$.

(Az, hogy \mathbf{C} teljes rangú, vagyis oszlopai lineárisan függetlenek így látható be. Tegyük fel, hogy a \mathbf{C} -t alkotó \mathbf{c}_i oszlopoknak valamely $\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{c}_i$ lineáris kombinációja $\mathbf{0}$. Mivel \mathbf{c}_i -ben az i -edik koordináta 0, de minden más \mathbf{c}_j -ben 1, $\sum_{j=1, j \neq i}^m \lambda_j = 0$, és ez minden i -re teljesül. Tehát a $\sum_{j=1}^m \lambda_j$ összegből bármely λ_j -t elhagyjuk a maradék összeg 0. Ez csak úgy lehet, ha minden λ_j egyenlő, akkor pedig mindegyik 0 lehet csak. Ebből következően a nullvektor fenti felírása csakis a triviális felírás lehet, tehát \mathbf{C} oszlopai valóban lineárisan függetlenek.)

A szorzás során a \mathbf{B} mátrix oszlopai által generált térből az \mathbf{A} által megjelenített lineáris transzformációval képezünk le vektorokat. A képteret generálják \mathbf{B} oszlopainak képei, vagyis \mathbf{C} oszlopai. A képtér dimenziója így éppen \mathbf{C} rangja, és ez nem lehet nagyobb, mint az eredeti tér dimenziója, ami viszont éppen \mathbf{B} rangja. Tehát $rk(\mathbf{C}) \leq rk(\mathbf{B})$. Ide beírva $rk(\mathbf{C}) = m$ -et $rk(\mathbf{B}) \geq m$ adódik, ami viszont (lévén \mathbf{B} m -szer n -es mátrix) csak úgy lehetséges, ha $m \leq n$. Ez volt a lemma állítása.

A Tétel bizonyításának befejezése:

Ha G minimális imperfekt gráf, akkor a 2. Lemma szerint létezik G csúcshalmazának két olyan, egyenként $\alpha\omega + 1$ méretű részhalmazrendszere, amely kielégíti a 3. Lemma

részalmazrendszereire vonatkozó feltételt. (A 2. Lemma kimondásakor csak annyit kötöttünk ki, hogy a megfelelő metszetek üresek, vagy sem, de a bizonyítás során megjegyeztük, hogy a nemüres $A_i \cap B_j$ metszetek mérete mindig 1, hiszen egy klikk és egy független halmaz nem metszheti egymást több pontban.) Alkalmazhatjuk tehát a 3. Lemmát m helyébe $\alpha\omega + 1$ -et, n helyébe $|V(G)|$ -t írva. Azt kaptuk tehát, hogy minimálisan imperfekt G gráfra $\alpha(G)\omega(G) + 1 \leq |V(G)|$. Pontosan ennyi hiányzott a bizonyítás befejezéséhez, ezzel tehát készen vagyunk.