INF. AN1. ZH2. MEGOLDÁSI   -1-   2017. 11. 23.

α VARIÁNS:

1, a, i, x_0 a D_f torlódási pontja, és (1)

[5] ii, $\forall P>0 : \exists \varepsilon>0 : f(x)>P$, ha $x \in \dot{K}_\varepsilon(x_0) = (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \setminus \{x_0\}$ (4)

b, [6] $$\frac{x+2}{|x^2-4|} = \frac{x+2}{|x+2|\cdot|x-2|} \underset{\text{ha } x>-2}{=} \frac{1}{|x-2|} > P, \text{ ha } |x-2| < \frac{1}{P}, \text{ tehát}$$

$\varepsilon(P) = \min\left\{4, \frac{1}{P}\right\}$ jó.

2, a, Az $\mathbb{R}\setminus\{0,3\}$ halmazon f folytonos. (1)

[12] $$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} e^{-\underbrace{\frac{1}{(x-3)^2}}_{\to +\infty}} = 0 \quad (3) \Rightarrow \text{megszüntethető szakadás} \quad (1)$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} e^{-\frac{1}{(x-3)^2}} = e^{-\frac{1}{9}} \quad (3)$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin^2(2x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0-} \Big(\underbrace{\frac{\sin(2x)}{2x}}_{\to 1}\Big)^2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \quad (3)$$

első fajú, ugrás (1)

[12] b, f nem diff.-ható a 0-ban, mert ott nem folytonos, és a 3-ban, mert ott nincs értelmezve. $\mathbb{R}\setminus\{0,3\}$-on f diff.-ható. (2)

Ha $x<0$:

$$f'(x) = \left(\frac{\sin^2(2x)}{3x^2}\right)' = \frac{2\sin(2x)\cos(2x)\cdot 3x^2 - \sin^2(2x)\cdot 6x}{9x^4} \quad (5)$$

Ha $x>0$ és $x\neq 3$:

$$f'(x) = \left(e^{-\frac{1}{(x-3)^2}}\right)' = \frac{2}{(x-3)^3} \cdot e^{-\frac{1}{(x-3)^2}} \quad (5)$$

3, a, $f(x) = 3\pi - \arcsin(2x-3)$

[10] $D_{\arcsin} = [-1,+1]$; $-1 \le 2x-3 \le +1 \iff 1 \le x \le 2 \Rightarrow D_f = [1,2]$ (3)

$3\pi - \underbrace{\arcsin(-1)}_{-\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{2}\pi$; $3\pi - \underbrace{\arcsin(+1)}_{+\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{2}\pi \Rightarrow R_f = \left[\frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi\right]$ (3)

$$f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{1-(2x-3)^2}} \quad (4) \quad (x \in (1,2))$$

3, b, $\forall x \in (1,2)$ esetén $f'(x) < 0$, így f szigorúan monoton csökken, tehát

$\boxed{4}$ injektív, létezik inverze.

vagy $x \mapsto 2x-3$ szig. mon. nő, $x \mapsto \arcsin x$ szig. mon. nő $\Rightarrow x \mapsto -\arcsin(2x-3)$ szig. mon. csökken $\Rightarrow f$ injektív, $\exists f^{-1}$.

$\boxed{5}$ c, $D_{f^{-1}} = R_f = \left[\frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi\right]$ ① ; $R_{f^{-1}} = D_f = [1,2]$ ①

$$y = f(x) \Rightarrow 2x-3 = \sin(3\pi - y) \Rightarrow f^{-1}(y) = x = \underline{\underline{\frac{1}{2}\left(\sin(3\pi-y)+3\right)}} \quad ③$$

— o —

4, a,

$\boxed{6}$ $$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(3x)}{\operatorname{arctg}(2x)} \overset{L'H}{\underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{3\cdot\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}}{2\cdot\frac{1}{1+4x^2}} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

b,

$\boxed{7}$ $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x\sin x} \overset{L'H}{\underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} \overset{L'H}{\underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{=}}$$ ② ②

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} = \frac{0}{1} = \underline{\underline{0}}$$ ② ①

c,

$\boxed{7}$ $$x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\frac{\ln x}{1-x}}\ ;$$ ③

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x} \overset{L'H}{\underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{1/x}{-1} = -1, \text{ tehát } \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \underline{\underline{e^{-1}}}$$ ③ ①

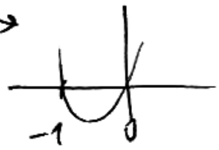
d,

$\boxed{6}$ $$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x \operatorname{ch}(2x)}{\operatorname{sh}(3x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x \cancel{\frac{1}{2}}\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)}{\cancel{\frac{1}{2}}\left(e^{3x}-e^{-3x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{3x}+e^{-x}}{e^{3x}-e^{-3x}} =$$ ③

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1+e^{-6x}}{1-e^{-6x}} = \underline{\underline{1}}$$ ② ①

5, $f(x) = x^2 e^{2x}$

[7] a, $f'(x) = 2x e^{2x} + 2x^2 e^{2x} = 2x(x+1) e^{2x}$ $\underset{>0}{}$ ③



x	$x<-1$	-1	$-1<x<0$	0	$0<x$
f'	+	0	−	0	+
f	↗	lok. max.	↘	lok. min.	↗

④

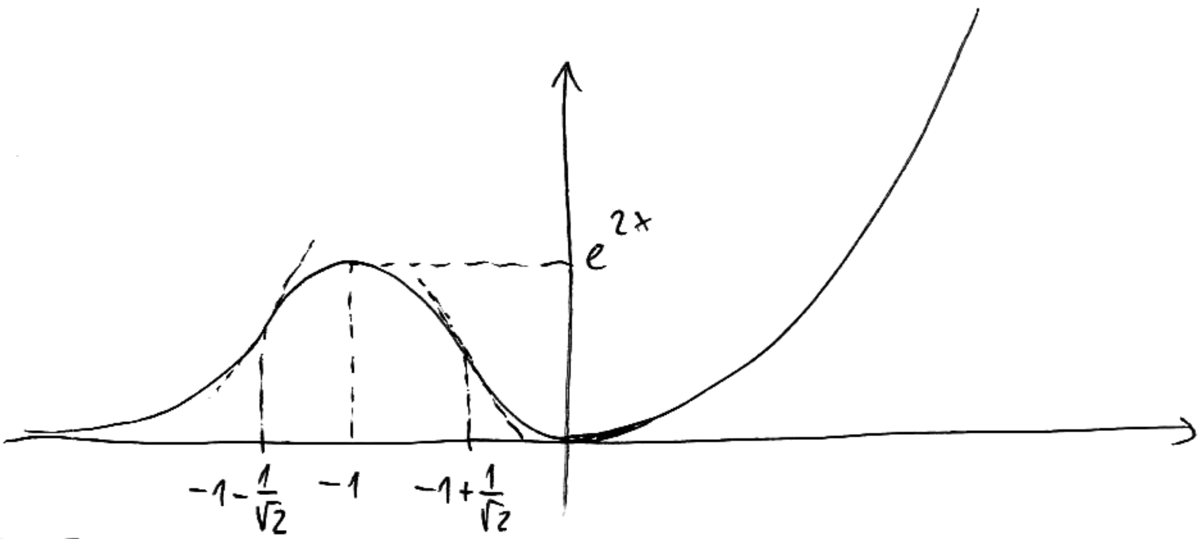
[8] b, $f''(x) = (2+4x)e^{2x} + 2(2x+2x^2)e^{2x} = 2(2x^2+4x+1)\, e^{2x}$ ③

$$x_{12} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{4} = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$ ②

x	$x<-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-1-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<-1+\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-1+\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-1+\frac{1}{\sqrt{2}}<x$
f''	+	0	−	0	+
f	∪	infl. p.	∩	infl. pont.	∪

③

[5] c, Látható, hogy $f(0)=0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



IMSC [8]

Tetszőleges $q \in \mathbb{N}_+$ esetén a $\mathbb{Z} \cdot \frac{1}{q}$ halmaznak nincs valós torlódási pontja.

Így ezek véges uniójának, $A_n = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z},\ q \in \{1,2,\dots n\} \right\}$-nek sincs.

Ha $x \in \mathbb{R} \setminus A_n$, akkor $|f(x)| < \frac{1}{n}$. Tehát $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ esetén $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Tehát f folytonos az irracionális pontokban ④, és első fajú, megszüntethető szakadása van a racionális pontokban ④

β VARIÁNS (tömör)

1, a, [5] x_0 a D_f tor. pontja (1) és $(\forall P>0)(\exists \varepsilon>0)(\forall x\in D_f\cap \dot K_\varepsilon(x_0))\,(f(x)<-P)$ (4)

b, [6] $\frac{x-3}{|x^2-9|}=\frac{x-3}{|x-3|}\cdot\frac{1}{|x+3|}\underset{\text{ha } x<3}{=}\frac{-1}{|x+3|}<-P$, ha $|x+3|<\frac{1}{P}\Rightarrow \varepsilon(P)=\min\left\{6,\frac{1}{P}\right\}$

2, a, f folytonos $\mathbb{R}\setminus\{0,5\}$-on. (1)

[12] $\lim_{x\to 5} f(x)=0$ (3) $\Rightarrow$ 5-ben megszüntethető szakadás van. (1)

$f(0+0)=e^{-\frac{1}{25}}$ (3), $f(0-0)=\ldots=\frac{9}{2}$ (3) $\Rightarrow$ 0-ban első fajú, véges ugrás (1)

[12] b, $\nexists f'(0)$ (0-ban nem folyt.), $\nexists f'(5)$ $(5\notin D_f)$ (2)

$x<0$: $f'(x)=\frac{3\cdot 2\sin(3x)\cos(3x)\cdot 2x^2-\sin^2(3x)\cdot 4x}{4x^4}$ (5)

$x>0,\ x\neq 5$: $f'(x)=\frac{2}{(x-5)^3}e^{-\frac{1}{(x-5)^2}}$ (5)

3, [10] a, $D_f=\left[\frac{1}{3},1\right]$ (3); $R_f=\left[\frac{9}{2}\pi,\frac{11}{2}\pi\right]$ (3); $f'(x)=\frac{-3}{\sqrt{1-(3x-2)^2}}$ (4)

[4] b, Lásd α variáns; c, [5] $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}\left(\sin(5\pi-x)+2\right)$ (3); $D_{f^{-1}}=R_f$ (1); $R_{f^{-1}}=D_f$ (1)

4, a, $\frac{5}{2}$ (6) b, 0 (mint α) [7]; c, e^{-1} (mint α) [7]; d, 1 (mint α) [6]

5, [7] a, $f'(x)=x(3x+2)e^{3x}$ (3)

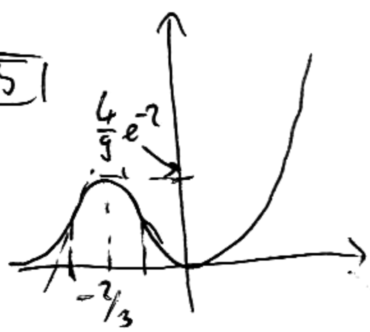
x	$x<-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}<x<0$	0	$0<x$
f'	+	0	−	0	+
f	↗	lok. max	↘	lok. min.	↗

(4)

c, $f(0)=0$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

[5]



b, $f''(x)=(6x+2+9x^2+6x)e^{3x}=$ (3)

[8] $=(9x^2+12x+2)e^{3x}$; $x_{12}=\frac{-12\pm\sqrt{144-72}}{18}=-\frac{2}{3}\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$ (2)

x	$x<\frac{-2-\sqrt{2}}{3}$	$\frac{-2-\sqrt{2}}{3}$	$\frac{-2-\sqrt{2}}{3}<x<\frac{-2+\sqrt{2}}{3}$	$\frac{-2+\sqrt{2}}{3}$	$\frac{-2+\sqrt{2}}{3}<x$
f''	+	0	−	0	+
f	∪	infl. p.	∩	infl. p.	∪

(3)

[IMSC] – mint α.