Elektromágneses terek (VIHVA204) **2009.12.22.**

Név: Javítási példány	Pontszám:	Javító:
NEPTUN:	10	EVT
Aláírás:		

Feladatonként 1 pont szerezhető. Csak a végeredményt írja rá a feladatlapra!

1. Síkkondenzátor fegyverzetei a $z = 0$ ill. a $z = d$ síkokban fekszenek, a feszültség közöttük zérus. A lemezek között a térfogati töltéssűrűség $\rho(z) = \rho_0 \sin\frac{z\pi}{d}$ és $\varepsilon_r = 1$. Legyen $d = 2\,\mathrm{cm}$ és $\rho_0 = 8\,\mu\mathrm{C/m^3}$. Mekkora a maximális térerősség a lemezek között?

$$E_{max} = 5{,}75\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}}$$

2. Koaxiális kábel köpenyének belső sugara ($R_2 = 5\,\mathrm{mm}$) adott. Mekkora legyen az ér R_1 sugara, hogy annak felszínén a lehető legkisebb térerősség lépjen fel adott feszültség mellett?

$$R_1 = 1{,}84\,\mathrm{mm}$$

3. A $0 < z$ félteret $\sigma_1 = 200\,\mathrm{S/m}$, míg a $0 > z$ félteret $\sigma_2 = 500\,\mathrm{S/m}$ fajlagos vezetőképességű anyag tölti ki. Az origóban egy $I = 8\,\mathrm{A}$ áramú pontszerű áramforrás van. Adja meg az elektromos térerősség *vektorát* a $P = (0\,;\,0\,;\,3\,\mathrm{m})$ pontban!

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_z 0{,}202\,\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{m}}$$

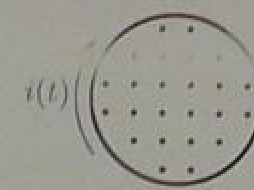
4. Határozza meg az ábrán látható félkör középpontjában a mágneses térerősség nagyságát! ($I = 3\,\mathrm{A}$ és $R = 20\,\mathrm{cm}$.)

$$H_P = 3{,}75\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

5. $Z_0 = 50\,\Omega$ hullámimpedanciájú koaxiális kábel szigetelésének relatív dielektromos állandója $\varepsilon_r = 2{,}25$. Számítsa ki a kábel $h = 200\,\mathrm{m}$ hosszú szakaszának kapacitását!

$$C = 20\,\mathrm{nF}$$

6. Az ábrán látható vezetőgyűrű ellenállása R, mágneses fluxusa $\Phi(t) = \Phi_0 \sin\omega t$. Adja meg az $i(t)$ áram időfüggvényét, ha a fluxus a papír síkjából *kifelé* mutató indukcióvonalak esetén pozitív!



$$i(t) = \frac{\Phi_0\omega}{R}\cos\omega t$$

7. Egy $A = 1{,}5\,\mathrm{mm^2}$ keresztmetszetű, $h = 3\,\mathrm{m}$ hosszú hengeres réz vezetőben $I = 10\,\mathrm{A}$ amplitúdójó, $f = 50\,\mathrm{Hz}$ frekvenciájú szinuszos váltakozóáram folyik. A behatolási mélység $\delta = 9{,}4\,\mathrm{mm}$, a réz fajlagos vezetőképessége $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^7\,\mathrm{S/m}$. Adja meg a vezetékben fejlődő hőteljesítményt!

$$P = 1{,}75\,\mathrm{W}$$

8. Levegőben terjedő síkhullám merőlegesen esik egy $Z_0' = 200\,\Omega$ hullámimpedanciájú ideális szigetelő közeg határfelületére. A szigetelő közeg a teljes végtelen félteret kitölti, a határfelületen a mágneses térerősség amplitúdója $H = 0{,}3\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$. Adja meg a határfelület $A = 3\,\mathrm{m^2}$-es felületén átáramló hatásos teljesítményt!

$$P = 27\,\mathrm{W}$$

9. Hertz-dipólus távolterében a dipólustól R távolságban az elektromos térerősség maximális amplitúdója $E = 120\,\frac{\mu\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$. Adja meg a mágneses térerősség amplitúdóját a dipólustól R távolságban, annak tengelyétől mért $\vartheta = 45°$ elevációs szög alatt!

$$H = 0{,}225\,\frac{\mu\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

10. Egy négyszög keresztmetszetű csőtápvonal TE_{10} módusban üzemel $f = 2{,}4\,\mathrm{GHz}$ frekvencián. A terjedési együttható $\gamma = j12{,}57\,\mathrm{m^{-1}}$. Adja meg a hullámterjedés fázissebességét!

$$v_f = 1{,}2 \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Elektromágneses terek

2009. 12. 22.

① $U = 0V$

$\rho(z) = \rho_0 \sin \frac{z\pi}{d}$

$\varepsilon_r = 1$

$d = 2\,cm = 0{,}02\,m$

$\rho_0 = 8 \frac{\mu C}{m^3}$

$E_{max} = ?$

a) IV. Maxwell : $\operatorname{div} \bar{D} = \rho$

b) Poisson : $-\Delta\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\bar{D} = \varepsilon \bar{E}$

$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \to \varepsilon_0$

---

a) $D = \int \rho_0 \sin\frac{z\pi}{d} dz = -\rho_0 \frac{d}{\pi} \underbrace{\cos\frac{z\pi}{d}}_{\text{max, ha } \cos = -1} + C$

$D = \varepsilon E$

$$E_1 = \frac{\rho_0 d}{\pi \varepsilon_0} = \frac{8\cdot 10^{-6}\frac{C}{m^3} \cdot 0{,}02\,m}{\pi \cdot \frac{10^{-9}}{4\pi\cdot 9}\frac{As}{Vm}} = 5760\frac{V}{m}$$

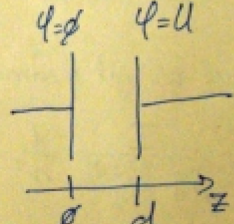
b) $-\Delta\phi = \frac{\rho}{\varepsilon}$ $\quad \Delta\phi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \int -\frac{\rho}{\varepsilon_0} dz = \int -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0 \sin\frac{z\pi}{d} dz = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0 \frac{d}{\pi}\cos\frac{z\pi}{d} + A$$

$$\phi = \int \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{d}{\pi}\cos\frac{z\pi}{d} dz + \int A\,dz = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{d^2}{\pi^2}\sin\frac{z\pi}{d} + Az + B$$

$\boxed{z = \emptyset}$



$$\emptyset = \underbrace{\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{d^2}{\pi^2}\sin 0°}_{=\emptyset} + B \to B = \emptyset$$

$\boxed{z = d}$

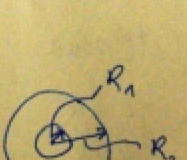
$$U = \emptyset = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{d^2}{\pi^2}\underbrace{\sin\pi}_{\emptyset} + Ad + \overset{\emptyset}{B} \to A = \emptyset$$

$A = E_2 = \emptyset$

$$E_{max} = E_1 + E_2 = \underline{\underline{E_1 = 5760\frac{V}{m}}}$$

② $r_2 = R_2 = 5\,mm = 0{,}005\,m$

$r_1 = R_1 \Big| = ?$ $\quad E_{min}$



$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{r} ; \varphi = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{r}$$

$$U = \frac{q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1} \to \frac{q}{2\pi\varepsilon} = \frac{U}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

$$E = \frac{U}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\frac{1}{r_1}\Bigg|_{min.}$$

$$E_{min} = U \left(\underbrace{\frac{1}{\ln\frac{r_2}{r_1}\,\frac{1}{r_1}}}_{\text{minimális, ha}} \right) \quad \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \cdot r_1 \text{ maximális}$$

$$\left(r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}\right)' = 0 \qquad \text{Szorzat fv.} \quad (fg)' = f'g + fg'$$

$$f = r_1 \,,\; g = \ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$f' = 1 \,,\; g' = -\frac{1}{r_1}$$

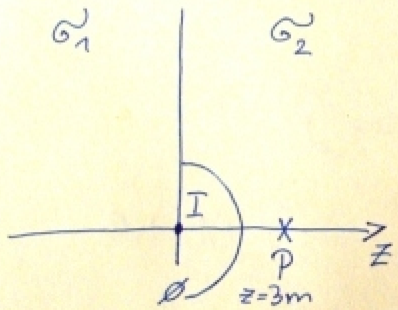
$$1 \cdot \ln\frac{r_2}{r_1} + r_1 \cdot \left(-\frac{1}{r_1}\right) = 0$$

$$\ln\frac{r_2}{r_1} - 1 = 0$$

$$\ln\frac{r_2}{r_1} = 1$$

$$\frac{r_2}{r_1} = e \;\rightarrow\; \underline{\underline{r_1 = \frac{r_2}{e}}}$$

(3)



$$\sigma_1 = 200\,\frac{S}{m}$$

$$\sigma_2 = 500\,\frac{S}{m}$$

$$I = 8A$$

$$E|_P = ?$$

Folytonossági egyenlet

$$E_1 = E_2$$

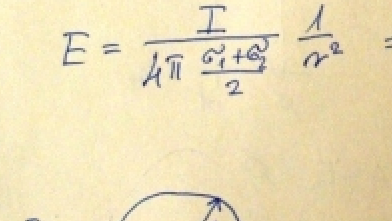
$$I = I_1 + I_2$$

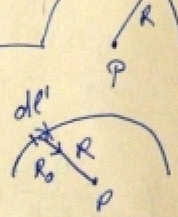
$$I = \int_{\text{félgömb}} \bar{J}\, d\bar{A} = E\sigma \frac{4r^2\pi}{2}$$

átlagos σ-val számolva $\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$

$$E = \frac{I}{4\pi\,\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}}\,\frac{1}{r^2} = \frac{8\,A}{4\pi\left(\frac{200+500}{2}\right)\frac{S}{m}\,9\,m^2} = \underline{\underline{0{,}2021\,\frac{mV}{m}}}\; e_z$$

(4)





Biot-Savart törvény

$I = 3A$

$R = 20cm = 0{,}2\,m$

$$\bar{H}(\bar{r}) = \frac{I}{4\pi} \oint_{\ell} \frac{d\bar{l} \times R_0}{R^2}$$

$$d\bar{l} \times R_0 = 1 \cdot dl \sin\alpha \qquad (R_0 = \text{egységvektor})$$

α $d\bar{l}$ és R_0 közötti szög

$\alpha = 90°$

Kerület : $2r\pi$

félkör : $r\pi$

$$\int dl = r\pi$$

$$H = \frac{I}{4\pi}\frac{1}{R^2}\int dl = \frac{I\,\pi R}{4\pi R^2}$$

$$H = \frac{I}{4R} = \frac{3A}{4 \cdot 0{,}2m} = 3{,}75\,\frac{A}{m}$$

⑤ $Z_0 = 50\,\Omega$

$\varepsilon_r = 2{,}25$

$h = 200\,m$

$C' = ?$

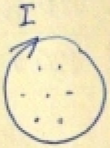
$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \,, \qquad Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \rightarrow L' = Z_0^2 C'$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} \,, \qquad \text{távvezeték paraméterek}$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r = Z_0^2 C' \cdot C' \rightarrow C' = \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r}{Z_0^2}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi} \frac{As}{Vm} \cdot 2{,}25}{50^2\,\Omega^2}}$$

$$C' = 10^{-10}\,\frac{F}{m}$$

$$C = C' \cdot h = 10^{-10}\,\frac{F}{m} \cdot 200\,m = \underline{\underline{20\,nF}}$$

⑥  balcsavar!

R

$\phi(t) = \phi_0 \sin\omega t$

$i(t) = ?$

Faraday-féle indukció

$$U = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{(jobbcsavar)}$$

$$U = -\frac{\partial(\phi_0 \sin\omega t)}{\partial t} = \omega \cdot (-1) \cdot \phi_0 \cdot (+\cos\omega t) = -\phi_0 \cdot \omega \cos\omega t \;! \text{ de}$$

$$i(t) = \frac{U(t)}{R} = \underline{\underline{\frac{\phi_0 \omega}{R} \cos\omega t}} \;; \quad U = \phi_0 \omega \cos\omega t$$

balcsavar szerinti az ábra

⑦ $A = 1{,}5\,mm^2 = 1{,}5 \cdot 10^{-6}\,m^2$ kör keresztmetszetű vezető

$h = 3\,m$

$\hat{I} = 10\,A$

$f = 50\,Hz$

$\delta = 9{,}4\,mm$

$\sigma = 5{,}7 \cdot 10^7\,\frac{S}{m}$

$P_{hő} = ?$

$$A = r^2 \pi \rightarrow r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{1{,}5\,mm^2}{\pi}} = 0{,}69\,mm$$

$\delta > r \Rightarrow$ a teljes felületen folyik az áram

$$R = \rho \frac{l}{A} = \frac{l}{\sigma A}\Bigg|_{l=h} = \frac{3\,m}{1{,}5 \cdot 10^{-6}\,m^2 \cdot 5{,}7\,\frac{S}{m} \cdot 10^7} = 35{,}09\,m\Omega$$

$$P = I_{eff}^2 R = \frac{1}{2} \hat{I}^2 \cdot R = \underline{\underline{1{,}7545\,W}}$$

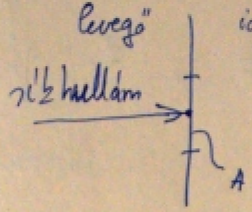
8.

$Z_0^1 = 200\Omega$

$H = 0{,}3 \frac{A}{m}$

$A = 3m^2$

$P|_A = ?$



ideális szigetelő

$Z_0^1 = 200\Omega$

$$S = \frac{1}{2} Z_0 H^2 = \frac{1}{2} \cdot 200\Omega \left(0{,}3 \frac{A}{m}\right)^2 = 9 \frac{W}{m^2}$$

$$H_1^+ + H_1^- = H_2^+ = H$$

$$P = \oint_a \vec{S}\, d\vec{a} = S \cdot A = 9 \frac{W}{m^2} \cdot 3m^2 = \underline{\underline{27W}}$$

9. Hertz-dipólus távoltere

$E|_R = 120 \frac{\mu V}{m}$ – maximális irányban, $\sin 90° = 1$

$\vartheta = 45°$ $\quad Z_0 = 120\pi$

$H|_{R,\vartheta} = ?$

$$H|_{R,45°} = \frac{E_{max}}{Z_0} \cdot \sin 45° = \frac{120 \frac{\mu V}{m}}{120\pi} \cdot \sin 45°$$

$$\underline{\underline{H = 0{,}225 \frac{\mu A}{m}}}$$

10. Csőtápvonal TE_{10}

$f = 2{,}4\ GHz$

$\gamma = j\, 12{,}57 \frac{1}{m}$

$v_f = ?$

$$\gamma = \alpha + j\beta \rightarrow \gamma = j\beta$$

$$\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c}$$

$$c = v_f \rightarrow v_f = \frac{2\pi f}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 2{,}4 \cdot 10^9 \frac{1}{s}}{12{,}57 \frac{1}{m}} =$$

$$\underline{\underline{v_f \cong 1{,}2 \cdot 10^9\ m/s}}$$