

1. feladat (6+12=18 pont)

a) Milyen kapcsolat van a sorozatok korlátossága, monotonitása, illetve konvergenciája között?

b) Igazolja, hogy az $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 3}$ rekurzióval definiált sorozat tagjaira teljesül, hogy $1 < a_n < 3$. Konvergens-e a sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

2. feladat (4+8 =12 pont)

a) Ismertesse Weierstrass II tételét.

b) Adja meg az $f(x) = (x^2 + 4x + 1)e^{-x}$ szélsőértékeit a $[0, 2]$ intervallumon.

3. feladat (10 pont)

Számolja ki az $\int_0^{2\pi} |\sin^3 x| dx$ integrált.

4. feladat (10 pont)

Oldja meg az $y' - \frac{3}{x}y = \frac{x^3}{1 + 4x^2}$ differenciálegyenletet.

5. feladat (10+10=20 pont)

a) Mondja ki a majoráns- és minoránskritériumot, és igazolja az egyiket!

b) Határozza meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n^2 + 1} \cdot x^n$ függvénysor konvergenciatartományát!

6. feladat (6+5+8=19 pont)

a) Számolja ki az $f(x, y) = xy \sin(2xy^2)$ függvény gradiensét, ahol létezik.

b) Mondja ki a Fubini-tételt téglán!

c) Számolja ki f integrálját az $1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{\pi}$ halmazon!

7. feladat (11 pont)

Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{ha } x \in [0, 3] \\ -2, & \text{ha } x \in [-3, 0] \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

Számolja ki az $f * f$ függvény Fourier-transzformáltját!