

Név: _____

Neptun kód: _____

--	--	--	--	--	--

1.	2.	3.	4.	5.	6.	Σ

1. feladat (5+12 pont)A) Mikor mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **analitikus** az $x \in \mathbb{R}$ pontban?

B) Tekintsük az alábbi 4 kezdetiérték-problémát. Melyikre vonatkozik a Picard-Lindelöf tétel, és melyikre nem? A válaszokhoz írjunk (rövid) indoklást és ahol lehet, állapítsuk meg a diffegyenlet típusát is!

i) $x \mapsto y(x) = ?$, $y' = (x^2 + 1)y''$, $y(0) = 0$

ii) $x \mapsto y(x) = ?$, $y' = \ln(e^y x^2 + e^y)$, $y(0) = 0$

iii) $x \mapsto y(x) = ?$, $(e^y)' = x^2$, $y(0) = 0$

iv) $x \mapsto y(x) = ?$, $(y'/3)^9 = y^6$, $y(0) = 0$

2. feladat (17 pont)Legyen $x \mapsto y(x)$ a megoldása az

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \arctan(\sqrt{\pi} x + y), \quad y(0) = 1$$

Cauchy-problémának. Becsüljük meg $y(0.1)$ értékét y elsőrendű Taylor-polinomja segítségével, illetve Lagrange (hibatagra vonatkozó) tételét használva adjunk felső korlátot a becslés hibájára!**3. feladat (17 pont)**

Számoljuk ki az

$$I = \int_{y=0}^{16} \int_{x=\sqrt{y}/2}^2 (1+x^3)^{\frac{1}{5}} dx dy$$

kettős-integrál értékét!

4. feladat (16 pont)

Döntsük el, hogy a megadott limeszek léteznek -e, és ha igen, határozzuk meg értéküket.

$$a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^4 + y^4) \ln(x^2 + y^2), \quad b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x)y}{x^2 + 2y^2}.$$

5. feladat (16 pont)

Írjunk föl egy olyan legalacsonyabbrendű, valós konstans együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletet, melynek az

$$y(x) = 7 + e^{-x}(x + \sin(2x))$$

képlettel megadott y függvény megoldása.

6. feladat (17 pont)

Számoljuk ki* az

$$S = 2^1 \cos(1) + 2^2 \cos(2) + \dots + 2^{100} \cos(100)$$

100-tagú összeg értékét.

*Segítség: tekintsük $\cos(\alpha)$ -t egy megfelelő **komplex szám** valós részének és használjuk ki a $(q + q^2 + \dots + q^n)(q - 1) = q^{n+1} - q$ algebrai összefüggést.*

*a végeredmény egy konkrét (néhány tizedesjegyre megadott) érték legyen, vagy legalábbis egy olyan kifejezés, ami már egy egyszerűbb számológéppel is jól számolható; tehát lehet benne \sin , \cos , hatványozás, gyökvonás stb. de ne maradjanak benne olyan jellegű dolgok mint “ \sum_0^n ”, “Re” vagy “Im”.