ANALÍZIS(2) | VIZSGADOLGOZAT | 2009. június 11.
Mérnök Informatikus szak | | Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (8 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' = (3x+1)^5 \ (y^2+4)$$

(Elég az implicit alak.)

$$\int \frac{1}{y^2+4}\,dy = \int (3x+1)^5\,dx \qquad (2)$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{y}{2}\right)^2}\,dy = \frac{1}{3}\int \underset{f'}{3}\ \underset{f^5}{(3x+1)^5}\,dx$$

$$\frac{1}{4}\ \frac{\operatorname{arctg}\frac{y}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\ \frac{(3x+1)^6}{6} + C$$

(2) (3) (1)

2. feladat (16 pont)

a) Írja le az x_0 bázispontú hatványsor általános alakját!
Milyen jellegű a hatványsor konvergencia tartománya?
Hogyan kapható meg a leírására szolgáló jellemző? (Két tétel.)

b) Adja meg az alábbi sor konvergencia tartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\ 2^{n+1}}{n^2}\ x^n$$

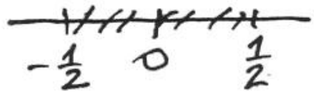
a.) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ (2)

Konv. tart.:

$$\left.\begin{array}{ll} \exists R: & |x-x_0|<R\text{-ben konv.} \\ & |x-x_0|>R\text{-ben div} \\ & |x-x_0|=R \quad ? \\ \text{De lehet} & \\ R=0: & \text{akkor csak } x_0\text{-ban konv.} \\ R=\infty: & \text{akkor } \forall\, x\text{-re konv.} \end{array}\right\} (3)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{„}R=\frac{1}{\alpha}\text{"}, \text{ ahol} & \alpha = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} \\ \text{vagy} & \alpha = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \end{array}\right\} (3)$$

b.) $\sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{\sqrt[n]{2^n \cdot 2}}{\sqrt[n]{n^2}} = \dfrac{2\,\sqrt[n]{2}}{(\sqrt[n]{n})^2} \longrightarrow \dfrac{2\cdot 1}{1^2} = 2 = \dfrac{1}{R} \Rightarrow R = \dfrac{1}{2}$ 5



Végpontok:

$x = -\frac{1}{2}$: $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{(-1)^n 2\cdot 2^n}{n^2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 2\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ konv.

$(\alpha = 2 > 1)$

$x = \frac{1}{2}$: $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{(-1)^n \cdot 2\cdot 2^n}{n^2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}$ konv.

(Leibniz sor, ill. abs. konv. is)

K.T.: $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 3

3. feladat (16 pont)

$$f(x) = x\ \mathrm{sh}\,(3\,x^2)$$

a) Írja fel az f függvény $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorát és adja meg annak konvergencia tartományát!

b) $f^{(100)}(0) = ?$, $\quad f^{(99)}(0) = ?$ (A sorfejtésből adjon választ!)

c) Az a) feladat megoldására támaszkodva írja fel f deriváltfüggvényének $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorát! Indokoljon!

a.) $\boxed{8}$

$\mathrm{sh}\,u = u + \dfrac{u^3}{3!} + \dfrac{u^5}{5!} + \ldots = \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!} \left(= \sum_{n=0}^\infty \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$

$u \in \mathbb{R}$

$f(x) = x\cdot \mathrm{sh}\,3x^2 = x \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{(3x^2)^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=1}^\infty \frac{3^{2n-1}}{(2n-1)!}\, x^{4n-1}$ 6

K.T.: $(-\infty, \infty)$ (tehát $R = \infty$) 2

b.) $f^{n}(0) = n!\, a_n$

$\boxed{4}$

$100 = 4n - 1$: $\nexists\, n \in \mathbb{N}$, tehát $a_{100} = 0$

$\Rightarrow f^{(100)}(0) = 0$

$99 = 4n - 1 \Rightarrow n = 25$

$f^{(99)}(0) = 99!\, a_{99} = 99!\, \dfrac{3^{49}}{49!}$

3/c. $\boxed{4}$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n-1}}{(2n-1)!}x^{4n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n-1}}{(2n-1)!}(4n-1)x^{4n-2}$$

szabad a hatványsort tagonként deriválni

A konv. sugár változatlan, tehát $R=\infty$. Így a sor $\forall$ x-re konv.

4. feladat (18 pont)

Legyen $\underline{a}$ belső pontja az $f:\mathbb{R}^m\mapsto\mathbb{R}$ függvény értelmezési tartományának!

a) Írja le az alábbi definíciókat!

A: f totálisan differenciálható $\underline{a}$-ban.

B: f-nek létezik x_k szerinti parciális deriváltja $\underline{a}$-ban.

b) Igaz-e az alábbi állítás?

$b1)$ $A \implies B$

$b2)$ (B igaz $k=1,\dots,m$-re) $\implies A$

Az igaz állítást bizonyítsa be !

a.) D

$f: D\mapsto\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}^m$, $\underline{a}=(a_1,\dots,a_m)\in\operatorname{int}D$, $\underline{h}=(h_1,\dots,h_m)$, $\underline{a}+\underline{h}\in D$

f (totálisan) deriválható $\underline{a}$-ban, ha Δf előállítható az alábbi alakban:

$$\Delta f=f(a_1+h_1,\dots,a_m+h_m)-f(a_1,\dots,a_m)=A_1h_1+\dots+A_mh_m+\varepsilon_1h_1+\dots+\varepsilon_mh_m$$

vagy vektorosan

$$\boxed{\Delta f=f(\underline{a}+\underline{h})-f(\underline{a})=\underline{A}\cdot\underline{h}+\underline{\varepsilon}(\underline{h})\cdot\underline{h}}$$

ahol $\underline{A}=[A_1,\dots,A_m]$ független $\underline{h}$-tól és $\underline{\varepsilon}=[\varepsilon_1(\underline{h}),\dots,\varepsilon_m(\underline{h})]\to\underline{0}$, ha $\underline{h}\to\underline{0}$. 5

D

$$\left.\frac{\mathrm{d}f_k}{\mathrm{d}x_k}\right|_{x_k=a_k}=\left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{\underline{x}=\underline{a}}=f'_{x_k}(\underline{a})=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a_1,\dots,a_{k-1},a_k+h,a_{k+1},\dots,a_m)-f(a_1,\dots,a_k,\dots,a_m)}{h}$$ 3

b) T

Legyen $\underline{a}$ a D_f értelmezési tartomány belső pontja!
Ha f az $\underline{a}$-ban totálisan deriválható
$\implies$ mindegyik változója szerinti parciális deriváltja $\exists$.

Tehát b1) igaz 2

(Tehát a totális deriválhatóság szükséges feltétele a parciális deriváltak létezése.)

B Speciális $\underline{h}$-ra felírjuk a totális deriválhatóság definícióját: $\underline{h}:=(0,0,\dots,0,h_k,0,\dots,0)$

$$\Delta f=f(\underline{a}+\underline{h})-f(\underline{a})=$$

$$=f(a_1,\dots,a_{k-1},a_k+h_k,a_{k+1},\dots,a_m)-f(a_1,\dots,a_m)=A_k\cdot h_k+\varepsilon_k(\underline{h})\cdot h_k$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{f(a_1,\dots,a_k+h_k,\dots,a_m)-f(a_1,\dots,a_k,\dots,a_m)}{h_k}=A_k+\varepsilon_k(\underline{h})$$ 6

és ebből $h_k \to 0$ $(\Longrightarrow \underline{h}\to\underline{0})$ esetén $f'_{x_k}(\underline{a})=A_k$ adódik.

(Tehát $\quad \operatorname{grad} f|_{\underline{a}} = \underline{A} = [f'_{x_1},\dots,f'_{x_m}]$) ■

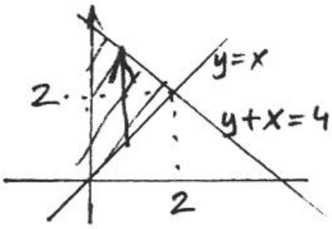
b2.) Hanis 2

5. feladat (15 pont)*

a) Cserélje meg az integrálás sorrendjét!

$$\int_0^2 \int_x^{4-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

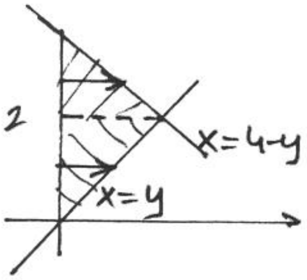
b) $\displaystyle\iint_T \mathrm{e}^{-2x^2-2y^2}\,\mathrm{d}T = ?$ $\qquad T:\ x^2+y^2 \le 4,\ y \ge 0$



a.) $\boxed{5}$

$x \le y \le 4-x$

$0 \le x \le 2$



$$I = \int_0^2 \int_{x=0}^{y} f\,dx\,dy + \int_2^4 \int_{x=0}^{4-y} f\,dx\,dy$$

b.) $\boxed{10}$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$ 2

$|J| = r$

$0 \le r \le 2$ 2

$0 \le \varphi \le \pi$

$$\int_0^2 \int_0^{\pi} e^{-2r^2}\, r\, d\varphi\, dr = (\pi - 0)\left(-\frac{1}{4}\right)\int_0^2 -4r\, e^{-2r^2}\, dr =$$

2 1

$$= -\frac{\pi}{4} e^{-2r^2}\Big|_0^2 = -\frac{\pi}{4}\left(e^{-8}-1\right) = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-8}\right)$$

3

6. feladat (16 pont)*

a) Hol differenciálható és hol reguláris az alábbi függvény?

$$f(z) = (x^3 + 2xy) + j\,(3x^2y + 6y)$$

Ahol differenciálható, ott írja fel az $f'(z)$ deriváltat!

b) Számolja ki az alábbi mennyiségek valós és képzetes részét!

$$a = \sin\left(\frac{\pi}{2} + j\pi\right), \qquad b = (-3j)^{j}$$

a) u, v parc. deriváltjai mindenütt léteznek és folytonosak

$\boxed{8}$ C-R: $u'_x = v'_y$ hol teljesül?

$u'_y = -v'_x$ (2)

$u'_x = 3x^2 + 2y = v'_y = 3x^2 + 6 \quad \Rightarrow y = 3$

$u'_y = 2x = -v'_x = -6xy \quad \Rightarrow 2x(\underbrace{1+3y}_{\neq 0}) = 0 \Rightarrow x = 0$

Tehát a $0 + j3$ pontban deriválható és sehol sem reguláris (4)

$f'(j3) = u'_x(0,3) + j\,v'_x(0,3) = 6$ (2)

b.) $\boxed{8}$ $a = \sin\left(\frac{\pi}{2} + j\pi\right) = \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} \cos j\pi + \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} \sin j\pi = \mathrm{ch}\,\pi$

$\mathrm{Im}\,a = 0 \quad \mathrm{Re}\,a = \mathrm{ch}\,\pi$ (3)

$b = e^{j \ln(-3j)} = e^{j(\ln 3 + j(-\frac{\pi}{2}))} = e^{\frac{\pi}{2} + j\ln 3} = e^{\frac{\pi}{2}}(\cos \ln 3 + j \sin \ln 3)$

$\mathrm{Re}\,b = e^{\frac{\pi}{2}} \cos \ln 3 \quad ; \quad \mathrm{Im}\,b = e^{\pi/2} \sin \ln 3$ (5)

7. feladat (11 pont)*

a)

$$I = \int_L e^{j3z}\,dz, \qquad \mathrm{Re}\,I = ?, \qquad \mathrm{Im}\,I = ?$$

L: az $A = \dfrac{\pi}{3}$ és $B = \dfrac{\pi}{2}$ pontokat összekötő szakasz A-ból B-be irányítva

b) $$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z+4)^3}\,dz = ?$$

a.) $\boxed{6}$ $\int_L e^{j3z}\,dz = \left.\frac{e^{j3z}}{j3}\right|_{\pi/3}^{\pi/2} \overset{(3)}{=} -j\frac{1}{3}\left(\underbrace{e^{j\frac{3\pi}{2}}}_{=-j} - \underbrace{e^{j\pi}}_{=-1}\right) = -\frac{1}{3} - j\frac{1}{3}$

$\mathrm{Re}\,I = -\frac{1}{3} \quad ; \quad \mathrm{Im}\,I = -\frac{1}{3}$ (3)

b.) $\boxed{5}$ $\oint \underbrace{\frac{e^z}{(z+4)^3}}_{\text{reg. T-n}}\,dz = 0$ (Cauchy-féle alaptétel miatt.)

an2v 090611/5.

Pótfeladatok. Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

8. feladat (9 pont)

$$f(x,y) = \frac{e^{3y}}{x^4+1}$$

a) $f'_x(x,y) = ?$, $\quad f'_y(x,y) = ?$

b) $\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{(1,0)} = ?$, ha $\underline{e} \parallel 2\underline{i} - 3\underline{j}$

a.) $\boxed{4}$ $f_x' = e^{3y} \frac{-4x^3}{(x^4+1)^2}$ (2) $\qquad f_y' = \frac{1}{x^4+1} e^{3y} \cdot 3$ (2)

b.) $\boxed{5}$ $\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = \operatorname{grad} f(P_0) \cdot \underline{e}$ (2)

$\underline{e} = \frac{2i-3j}{\sqrt{4+9}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \underline{i} - \frac{3}{\sqrt{13}} j$ (1)

$\operatorname{grad} f(P_0) = f_x'(P_0)\underline{i} + f_y'(P_0)\underline{j} = -\underline{i} + \frac{3}{2} j$ (1)

$\frac{df}{d\underline{e}} = -\frac{2}{\sqrt{13}} - \frac{3}{2}\frac{3}{\sqrt{13}}$ (1)

9. feladat (11 pont)

a) $\binom{-1/2}{4} = ?$ (Elemi műveletekkel adja meg!)

b) Írja fel az $f(x) = \sqrt[3]{1-2x^4}$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és annak konvergenciasugarát!

a.) $\binom{-1/2}{4} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ (3)

b.) $f(x) = (1+(-2x^4))^{\frac{1}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/3}{n} (-2x^4)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/3}{n} (-2)^n x^{4n}$ (5)

$|-2x^4| = 2|x|^4 < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, tehát $R = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ (3)

an20090611/6.