

1. feladat (22 pont)

Számolja ki az alábbi határértékeket

$$a) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\operatorname{arsh}(x+1)}{\arccos(x^4)}, \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{ch}(3x)}{\operatorname{sh}(4x)}, \quad c) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

2. feladat (8 pont)

A megfelelő definícióval igazolja, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{5}{2x-8} = \infty.$$

3. feladat (15 pont)

Hol és milyen típusú szakadása van az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} x}{x}, & \text{ha } x \in [-\pi, 0] \\ \frac{\sin(3x)}{x}, & \text{ha } x \notin [-\pi, 0] \end{cases}$$

függvénynek?

4. feladat (11 pont)

Hol folytonos illetve differenciálható az alábbi függvény?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Írja fel a deriváltat, ahol létezik!

5. feladat (18 pont)

Igazolja, hogy az

$$f(x) = -\pi + 2 \operatorname{arctg}(\operatorname{sh}(3x) - 1)$$

függvény invertálható a teljes értelmezési tartományon, és adja meg az inverzfüggvényt, annak értelmezési tartományát, értékkészletét és deriváltját.

6. feladat (13 pont)

Határozza meg a legbővebb intervallumokat, ahol az

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$$

függvény konvex illetve konkáv.

7. feladat (13 pont)

a) Határozza meg a legbővebb intervallumokat, ahol az

$$f(x) = 2x \ln x + x$$

függvény monoton növekvő illetve monoton csökkenő.

b) Felveszi-e a függvény a minimumát a $[\frac{1}{e^2}, e^2]$ intervallumon? Ha igen, számolja ki a minimumot.

Pótfeladatok (csak 40 pont eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (8 pont)

Számolja ki az alábbi határértéket:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - x - 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} \right).$$

9. feladat (12 pont)

Adja meg az

$$f(x) = (x^2 + e^x)^{\operatorname{tg} x}$$

függvény érintőegyenésének egyenletét az $x_0 = 0$ pontban.