

Név + Neptun: JAVÍTÓ	Nagypélda pontszáma: 20
Sajátkezű aláírás:	Kis példák pontszáma: 10

CSAK EGÉSZ PONTSZÁM ADHATÓ!

Nagypélda (megoldását külön lapra kérjük):

Egy FI rendszer állapotváltozós leírása

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= -4x_1(t) + 3u(t) \\x_2'(t) &= 2x_1(t) - 3x_2(t) + pu(t) \\y(t) &= 5x_2(t) + u(t),\end{aligned}$$

ahol p valós paraméter.

- a. Milyen p értékek mellett létezik a rendszer *átviteli karakterisztikája*? Indokolja válaszát! (2 pont)
- Bármilyen $p \in \mathbb{R}$ estén létezik az átviteli karakterisztika. A rendszermátrix sajátértékei (melyek p -től nem függenek) negatív valós részüek, így a rendszer aszimptotikusan stabilis, és így GV stabilis is. **2 p.**

- b. Határozza meg az átviteli karakterisztikát *normál alakban*! (p továbbra is paraméter.) (6 pont)

Első megoldás:

$$H(j\omega) = \frac{\mathbf{C}^T \text{adj}(j\omega \mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{B}}{\det(j\omega \mathbf{E} - \mathbf{A})} + D$$

$$j\omega \mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} j\omega + 4 & 0 \\ -2 & j\omega + 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(j\omega \mathbf{E} - \mathbf{A}) = (j\omega)^2 + 7j\omega + 12 \quad (2 \text{ p.})$$

$$\text{adj}(j\omega \mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} j\omega + 3 & 0 \\ 2 & j\omega + 4 \end{bmatrix}$$

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + (7 + 5p)j\omega + (42 + 20p)}{(j\omega)^2 + 7j\omega + 12} \quad (4 \text{ p.})$$

Második megoldás: Színuszos állandósult állapotot feltételezve, az időtartománybeli egyenleteket felírhatjuk a komplex amplitúdókra is:

$$j\omega \bar{X}_1 = -4\bar{X}_1 + 3\bar{U}$$

$$j\omega \bar{X}_2 = 2\bar{X}_1 - 3\bar{X}_2 + p\bar{U}$$

$$\bar{Y} = 5\bar{X}_2 + \bar{U} \quad (3 \text{ p.})$$

Az átviteli karakterisztika:

$$H(j\omega) = \frac{\bar{Y}}{\bar{U}}$$

Némi számolás után adódik, hogy

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + (7 + 5p)j\omega + (42 + 20p)}{(j\omega)^2 + 7j\omega + 12} \quad (3 \text{ p.})$$

Csak egy megoldás értékelhető. Ha nem normál alakban adja meg az átviteli karakterisztikát, akkor a b) kérdésre legfeljebb 4 pont adható.

A továbbiakban tételezze fel, hogy a rendszer átviteli karakterisztikája valamely konkrét p érték mellett:

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + 7j\omega + 42}{(j\omega)^2 + 7j\omega + 12}$$

- c. A rendszer gerjesztése egy periodikus jel, $T = 4$ periódusidővel. A jel egy periódusa:

$$u(t) = \begin{cases} 8 & \text{ha } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{ha } 1 < t < 4 \end{cases}$$

Adja meg a jel *elsőrendű* valós Fourier-polinom közelítését!

(8 pont)

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad (1 \text{ p.})$$

$$U_0^c = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = 2 \quad (2 \text{ p.})$$

$$U_1^c = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-j\omega_0 t} dt = \frac{4}{\pi} (1 - j) = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} e^{-j\pi/4} \quad (3 \text{ p.})$$

$$U_1 = 3,6013, \quad \rho_1 = -\pi/4 = -0,7854$$

A jel elsőrendű Fourier-soros közelítése:

$$u(t) \approx 2 + 2,547 \cos(\pi/2 \cdot t) + 2,547 \sin(\pi/2 \cdot t) \quad (2 \text{ p.})$$

A trigonometrikus függvényeket össze is lehet vonni (nem kötelező):

$$u(t) \approx 2 + 3,601 \cos(\pi/2 \cdot t - \pi/4)$$

- d. Határozza meg a rendszer $y(t)$ válaszána *elsőrendű* valós Fourier-polinom közelítését a fenti $u(t)$ gerjesztésre!

(4 pont)

Az átviteli karakterisztika értékei a szóban forgó körfrekvenciákon:

$$H(j\omega)|_{\omega=0} = 3,5 \quad (1 \text{ p.})$$

$$H(j\omega)|_{\omega=\pi/2} = 2,820 e^{-j0,585} \quad (1 \text{ p.})$$

Ezek ismeretében (és természetesen felhasználva az előző pont eredményeit) a keresett válasz:

$$y(t) = 3,5 \cdot 2 + 2,820 \cdot 3,601 \cos(\pi/2 \cdot t - \pi/4 - 0,585)$$

$$y(t) = 7 + 10,16 \cos(\pi/2 \cdot t - 1,372) \quad (2 \text{ p.})$$

Kis példák (Mindegyik 2 pontot ér. Kérjük, hogy a választ a feladat szövege alá írja!):

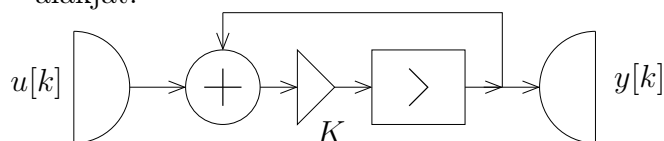
1. Egy szinuszos DI jel komplex csúcértéke $\bar{X} = 8e^{j0,3}$, diszkrét körfrekvenciája $\vartheta = 3$. Adja meg a jel egy ütemmel késleltetjének komplex amplitúdóját!

$$8e^{-j2,7} \quad (2 \text{ p.})$$

2. Adja meg az $x[k] = \cos(k\pi/7)$ DI jel periódushosszát, vagy indokolja, ha ez nem lehetséges!

$$L = 14 \quad (2 \text{ p.})$$

3. Vegyen fel az alábbi DI hálózatban állapotváltozót, és adja meg az állapotváltozós leírás normál alakját!



Állapotváltozó ($x[k]$) a késleltető kimeneti jele.

$$x[k + 1] = Kx[k] + Ku[k], \quad y[k] = x[k] \quad (2 \text{ p.})$$

4. Két szinuszos DI jel kifejezése $u_1[k] = 4 \cos(8k)$ és $u_2[k] = 4 \cos(8k + \pi/2)$. Adja meg a két jel összegének komplex amplitúdóját!

$$5,656e^{j0,785} = 4 + 4j = 4\sqrt{2}e^{j\pi/4} \quad (2 \text{ p.})$$

5. Egy DI rendszer válasza $y[k] = 3 \sin(4k)$, az átviteli tényező értéke a $\vartheta = 4$ diszkrét körfrekvencián $\bar{H} = 1 + j$. Adja meg a rendszer gerjesztésének időfüggvényét!

$$2,122 \sin(4k - 0,785) = 2,122 \cos(4k - 2,356) = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos(4k - \frac{3\pi}{4}) \quad (2 \text{ p.})$$

(Bármelyik alak elegendő.)