1. feladat (6+12=18 pont)
a) Milyen kapcsolat van a sorozatok korlátossága, monotonitása, illetve konvergenciája között?
b) Igazolja, hogy az $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \sqrt{6a_n - 8}$ rekurzióval definiált sorozat tagjaira teljesül, hogy $2 < a_n < 4$. Konvergens-e a sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

Mo. *a*) Konvergens $\Longrightarrow$ korlátos
Monoton és korlátos $\Longrightarrow$ konvergens.
b) Teljes indukcióval $2 < a_1 < 4$, és
$2 < a_n < 4 \Rightarrow 2 = \sqrt{6 \cdot 2 - 8} < \sqrt{6a_n - 8} = a_{n+1} < \sqrt{6 \cdot 4 - 8} = 4$.
$a_2 = \sqrt{10} > 3 = a_1$, és $a_n < a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{6a_n - 8} < \sqrt{6a_{n+1} - 8} = a_{n+2}$.
A sorozat monoton nő és korlátos, így konvergens . A lehetséges határértékre teljesül, hogy $A = \sqrt{6A - 8}$, vagyis $A^2 - 6A + 8 = 0$, így $A = 2$ vagy $A = 4$, de mivel $a_n \geq 3$, így a sorozat határértéke 4 .

---

2. feladat (4+8 =12 pont)
a) Ismertesse Weierstrass II tételét.
b) Adja meg az $f(x) = (x^2 + 5x + 1)e^{-x}$ szélsőértékeit a $[0, 2]$ intervallumon.

Mo. *a*) Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvény felveszi a minimumát és a maximumát .
b) $f'(x) = (2x+5)e^{-x} - (x^2+5x+1)e^{-x} = e^{-x}(-x^2-3x+4) = 0$, ha $x = -4 \notin [0, 2]$ vagy $x = 1 \in [0, 2]$. $f(1) = \dfrac{7}{e} > f(2) = \dfrac{15}{e^2} > f(0) = 1$, tehát a minimum 1, a maximum $\dfrac{7}{e}$.

---

3. feladat (10 pont)
Számolja ki az $\displaystyle\int_0^\pi \left|\cos^3 x\right| \mathrm{d}x$ integrált.

Mo. $\displaystyle\int \cos^3 x \,\mathrm{d}x = \int \cos x(1 - \sin^2 x) \,\mathrm{d}x = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$ így

$$\int_0^\pi |\cos^3 x| \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos^3 x \,\mathrm{d}x - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^3 x \,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}.$$

---

4. feladat (10 pont)
Oldja meg az $y' - \frac{2}{x}\,y = \frac{x^2}{1+9x^2}$ differenciálegyenletet.

Mo. A homogén egyenlet $y' = \frac{2}{x}\,y$ megoldása $y_h = cx^2$. Az inhomogén egyenlet $y_{ip} = c(x)x^2$ partikuláris megoldása, ahol $c'(x)x^2 = \frac{x^2}{1+9x^2}$, vagyis

$$c(x) = \int \frac{1}{1+(3x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\operatorname{arctg}(3x)}{3} \qquad ,$$

így $y = \frac{x^2 \operatorname{arctg}(3x)}{3} + cx^2$.

---

5. feladat (10+10=20 pont)
a) Mondja ki a majoráns- és minoránskritériumot, és igazolja az egyiket!
b) Határozza meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2+2} \cdot x^n$ függvénysor konvergenciatartományát!

Mo. *a*) Tétel , bizonyítás .

b)Mivel $1 \leq \sqrt[n]{n^2+2} \leq \sqrt[n]{3}(\sqrt[n]{n})^2 \to 1$, így:

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+2}{4^n}} = \frac{1}{4} \qquad .$$

$x = \frac{1}{4}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}$ konvergens a majoráns-kritérium miatt, mert $\frac{1}{n^2+2} \leq \frac{1}{n^2}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens .

$x = -\frac{1}{4}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+2}$ konvergens a Leibniz-kritérium miatt (vagy az előző eset miatt látszik, hogy abszolút konvergens a sor, azaz konvergens is).

Így a konvergenciatartomány $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$.

---

6. feladat (6+5+8=19 pont)
a) Számolja ki az $f(x,y) = xy\cos(3xy^2)$ függvény gradiensét, ahol létezik.
b) Mondja ki a Fubini-tételt téglán!
c) Számolja ki f integrálját az $1 \le x \le 3, 0 \le y \le \sqrt{\pi/2}$ halmazon!

Mo. *a*) $\operatorname{grad} f(x,y) = (f'_x(x,y), f'_y(x,y)) =$
$$= (y\cos(3xy^2) - 3xy^3\sin(3xy^2), x\cos(3xy^2) - 6x^2y^2\sin(3xy^2))$$
b) Analízis 2. jegyzet 3.128. Tétel

c) $$\int_1^3 \int_0^{\sqrt{\pi/2}} xy\cos(3xy^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \left[\tfrac{1}{6}\sin(3xy^2)\right]_{y=0}^{\sqrt{\pi/2}} \mathrm{d}x =$$
$$= \int_1^3 \left(\tfrac{1}{6}\sin(3\pi x/2)\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{9\pi}\cos(3\pi x/2)\right]_1^3 = 0.$$

---

7. feladat (11 pont)
Legyen
$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{ha } x \in [0,2] \\ -3, & \text{ha } x \in [-2,0] \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$
Számolja ki az $f * f$ függvény Fourier-transzformáltját!

Mo. $$(\mathcal{F}f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,\mathrm{d}x = -6i\int_0^2 \sin(\omega x)\,\mathrm{d}x = 6i \cdot \frac{\cos(2\omega) - 1}{\omega}$$
$$\mathcal{F}(f * f) = (\mathcal{F}f)^2 = -36 \cdot \frac{(\cos(2\omega) - 1)^2}{\omega^2}$$
