1. feladat (16 pont)
Számolja ki a következő egyenlet (komplex) megoldásait!

$$z^4 - (3+4i)z^3 + 12iz^2 = 0$$

Mo. $z^4 - (3+4i)z^3 + 12iz^2 = z^2(z^2 - (3+4i)z + 12i) = 0$ **(4p)** , ha $z = 0$ **(1p)** , vagy
$z = \dfrac{3+4i+\sqrt{(3+4i)^2-48i}}{2} = \dfrac{3+4i+\sqrt{(3-4i)^2}}{2} = \dfrac{3+4i\pm(3-4i)}{2}$ **(8p)** ,
tehát ha $z = 3$ vagy $z = 4i$ **(3p)** .

---

2. feladat (10+10+10=30 pont)
Számolja ki az alábbi sorozatok határértékét!

$$a_n = \sqrt{n^3-4n-2} - \sqrt{n^3-3n+5}, \qquad b_n = \sqrt[n]{\frac{3^n+2^n}{n^2+3}}, \qquad c_n = \left(\frac{3n^3-5}{3n^3+6}\right)^{2n^3}$$

Mo. $a_n \overset{(\mathbf{3p})}{=} \dfrac{n^3-4n-2-(n^3-3n+5)}{\sqrt{n^3-4n-2}+\sqrt{n^3-3n+5}} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \dfrac{-n-7}{\sqrt{n^3-4n-2}+\sqrt{n^3-3n+5}} \overset{(\mathbf{3p})}{=}$

$$= \frac{n}{n^{3/2}} \cdot \frac{-1-\frac{7}{n}}{\sqrt{1-\frac{4}{n^2}-\frac{2}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^3}}} \overset{(\mathbf{2p})}{\to} 0.$$

A rendőrelv miatt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3^n+2^n}{n^2+3}} = 3$ **(2p)** , mert

$$3 \overset{(\mathbf{1p})}{\leftarrow} \frac{3}{\sqrt[n]{4}\,(\sqrt[n]{n})^2} \overset{(\mathbf{1p})}{=} \sqrt[n]{\frac{3^n}{4n^2}} \overset{(\mathbf{2p})}{\le} \sqrt[n]{\frac{3^n+2^n}{n^2+3}} \overset{(\mathbf{2p})}{\le} \sqrt[n]{\frac{2\cdot 3^n}{n^2}} \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{3\sqrt[n]{2}}{(\sqrt[n]{n})^2} \overset{(\mathbf{1p})}{\to} 3$$

$$a_n = \left(\frac{\left(1-\frac{5/3}{n^3}\right)^{n^3}}{\left(1+\frac{6/3}{n^3}\right)^{n^3}}\right)^2 \to \left(\frac{e^{-\frac{5}{3}}}{e^2}\right)^2 = e^{-\frac{22}{3}} \qquad \mathbf{(5+4+1p)}$$

---

3. feladat (16 pont)
Adja meg az $a_n = \left(\dfrac{n-(-1)^n}{n+4}\right)^{n-1}$ sorozat torlódásai pontjainak halmazát, limesz szuperiorját, illetve limesz inferiorját! Konvergens-e a sorozat?

Mo. Páratlan n esetén

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n+4}\right)^{n-1} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{4}{n}\right)^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n+4}\right)^{-1} \to \frac{1}{e^3}, \qquad \textbf{(6p)}$$

páros n esetén

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n+4}\right)^{n-1} = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{4}{n}\right)^n} \cdot \left(\frac{n-1}{n+4}\right)^{-1} \to \frac{1}{e^5}, \qquad \textbf{(5p)}$$

így a sorozat torlódási pontjainak halmaza $\left\{\frac{1}{e^3}, \frac{1}{e^5}\right\}$ **(2p)** , $\limsup a_n = \frac{1}{e^3}$ **(1p)** , $\liminf a_n = \dfrac{1}{e^5}$ **(1p)** , és mivel $\liminf a_n \neq \limsup a_n$, így a sorozat divergens **(1p)** .

---

4. feladat (5+11=16 pont)
a) Adja meg a $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ definícióját! (Az x_0 a D_f torlódási pontja.)
b) A definíció alapján mutassa meg, hogy $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{7x-2}{4x+7} = -3$!

Mo. *a)* $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, melyre $0 < |x-x_0| < \delta(\varepsilon)$ esetén $|f(x) - A| < \varepsilon$. **(5p)**
b) Legyen $\varepsilon > 0$.

$$\left|\frac{7x-2}{4x+7} + 3\right| = \frac{|7x-2+12x+21|}{|4x+7|} = 19\frac{|x+1|}{|4x+7|} \qquad \textbf{(3p)}$$

A további becsléshez felhasználjuk, hogy x a -1 közelében van. Ha például $|x+1| < \frac{1}{2}$, akkor $-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$, és $1 < 4x+7 < 5$. **(3p)** Tehát

$$19\frac{|x+1|}{|4x+7|} < 19|x+1| < \varepsilon, \qquad \textbf{(2p)}$$

ha $|x+1| < \frac{1}{19}\varepsilon$ **(1p)** , így $\delta(\varepsilon) = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{19}\varepsilon\right)$. **(2p)**

---

5. feladat (22 pont)
Hol folytonos, hol és milyen típusú szakadása van az alábbi függvénynek?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-3)}{x^2+2x-15}, & \text{ha } x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{4x^2}{x+6}, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Mo. A függvény folytonos függvények kompozíciója, így a nevező zérushelyeiben, tehát az $x = 3$, $x = -6$ pontban van, valamint az $x = 0$ pontban lehet szakadása, máshol mindenütt folytonos. **(4p)** ($x = -5$ esetén nincs baj, hiszen máshogy van értelmezve a függvény.)

$$\lim_{x\to 3\pm} f(x) = \lim_{x\to 3\pm} \frac{\sin(x-3)}{(x-3)} \cdot \frac{1}{x+5} = 1 \cdot \frac{1}{8}, (\mathbf{4p})$$

vagyis ebben a pontban a függvénynek megszüntethető szakadása van. **(2p)**

$$\lim_{x\to -6\pm} f(x) = \lim_{x\to -6\pm} \frac{4x^2}{x+6} = \pm\infty, (\mathbf{4p})$$

vagyis ebben a pontban a függvénynek másodfajú szakadása van. **(2p)**

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = f(0) = \frac{\sin 3}{15} \neq 0 = \frac{4 \cdot 0^2)}{0+6} = \lim_{x\to 0-} \frac{4x^2}{x+6}, (\mathbf{4p})$$

így az $x = 0$ pontban véges ugrása van a függvénynek. **(2p)**

---

6. feladat (10 pont, IMSC-seknek javasolt.)
Legyen

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{a_n}.$$

Határoza meg az így definiált rekurzív sorozat torlódási pontjait! (Segítség: Vizsgálja külön a páros és páratlan indexű részsorozatot!)

Mo.

$$a_{n+2} = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}\sqrt[3]{a_n}} = +2^{-\frac{4}{3}}\sqrt[9]{a_n} \qquad (\mathbf{2p})$$

Az $A = 2^{-\frac{4}{3}}\sqrt[9]{A}$ egyenlet megoldásai: $A_0 = 0$, $A_\pm = \pm 2^{-\frac{3}{2}} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$ **(3p)** .

Annak észrevétele, hogy a_{2n} monoton csökkenő módon tart A_+-hoz: **(2p)** .

Annak észrevétele, hogy a_{2n+1} monoton növő módon tart A_--hoz: **(2p)** .

Így a torlódási pontok halmaza: $S = \{A_+, A_-\}$ **(1p)** .
