# Matematika A2a
## 2012/13/II. U0, W0 kurzus
## 4. vizsga dolgozat
*2013. 06. 20. 10.15–11.45*

Név: ____________________

Neptun kód: ______________

Gyakorlat kurzus:

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | $\sum$: |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

1. Bizonyítsa be, hogy az *(10 p.)*

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \qquad (x,t) \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}\, \mathrm{e}^{-\left(\frac{x^2}{t}\right)}$$

függvényre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4\frac{\partial f}{\partial t}$$

teljesül.

A parciális deriváltakra

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\, \mathrm{e}^{-\left(\frac{x^2}{t}\right)} + \frac{1}{\sqrt{t}}\, \mathrm{e}^{-\left(\frac{x^2}{t}\right)} \cdot \frac{x^2}{t^2} = -\frac{1}{2t} f(x,t) + \frac{x^2}{t^2} f(x,t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f(x,t) \cdot \frac{-2x}{t}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x,t) \cdot \frac{-2x}{t} \cdot \frac{-2x}{t} + f(x,t) \cdot \frac{-2}{t} = -\frac{2}{t} f(x,t) + \frac{4x^2}{t^2} f(x,t)$$

adódik, amiből rögtön látszik, hogy teljesül a bizonyítandó egyenlőség.

2. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$. *(10 p.)*
   a. Határozza meg az $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ határfüggvényt.
   b. Egyenletesen konvergál-e az $f_n$ függvénysorozat az $f$ határfüggvényhez a $[-1,1]$, illetve az $[1,3]$ intervallumon?

a. A határfüggvény

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(nx) = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{\pi}{2}, & \text{ha} & x > 0; \\ 0, & \text{ha} & x = 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{ha} & x < 0; \end{array} \right\} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x.$$

b. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n$ folytonos, ezért ha a $[-1,1]$ intervallumon az $f_n$ függvénysorozat egyenletesen konvergálna az $f$ határfüggvényhez, akkor az is folytonos lenne a $[-1,1]$ halmazon. Azonban $f$ nem folytonos a 0 pontban, így $f_n$ nem konvergál egyenletesen az $f$ függvényhez itt.
Mivel az $[1,3]$ intervallumon

$$\|f - f_n\| = \sup_{x\in[1,3]} |f(x) - f_n(x)| = \sup_{x\in[1,3]} \left|\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(nx)\right| = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n,$$

és $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n = 0$, ezért itt a konvergencia egyenletes.

3. Felírható-e a $p(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 6$ polinom a $q_1(x) = x^3 + 2x$, a $q_2 = 3x^3 + x^2$ és a $q_3(x) = x^2 + 2x + 4$ polinomok lineáris kombinációjaként? *(10 p.)*

Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$. Akkor teljesül a $aq_1 + bq_2 + cq_3 = p$ egyenlet, ha mindkét oldalon megegyeznek az $x^3, x^2, x^1, x^0$ tagok együtthatói. Ez az alábbi egyenletrendszerre vezet.

$$\begin{cases} x^3: & a + 3b = 1 \\ x^2: & b + c = -2 \\ x^1: & 2a + 2c = 2 \\ x^0: & 4c = -6 \end{cases}$$

Az utolsó egyenlet alapján $c = -\frac{3}{2}$, illetve a 2. és 3. egyenlet alapján $b = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ és $a = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.
Ekkor viszont az első egyenlet is teljesül, hiszen

$$a + 3b = \frac{5}{2} - \frac{3}{1} = 1.$$

Tehát $p$ kifjezhető a $q_1, q_2, q_3$ polinomok lineáris kombinációjaként.
$(p = \frac{5}{2}q_1 - \frac{1}{2}q_2 - \frac{3}{2}q_3)$

4. Tekintsük az $f : [-5, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\sqrt{25 - x^2}\right)^3$ függvényt. Határozza meg az $f$ függvény $a = 3$ pont körüli Taylor-sorának első 3 tagját. *(10 p.)*

A Taylor-sor első három tagja

$$T_{3,a,f}(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2.$$

Mivel

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{25 - x^2} \cdot (-2x) = -3x\sqrt{25 - x^2}$$
$$f''(x) = -3\sqrt{25 - x^2} - 3x \cdot \frac{1}{2\sqrt{25 - x^2}} \cdot (-2x),$$

ezért

$$f(a) = 4^3 = 64$$
$$f'(a) = -9 \cdot 4 = -36$$
$$f''(a) = -3 \cdot 4 - 9 \cdot \frac{1}{8}(-6) = -12 + \frac{27}{4} = -\frac{21}{4}.$$

Vagyis a keresett kifejezés

$$T_{3,a,f}(x) = 64 - 36(x-3) - \frac{21}{8}(x-3)^2 \quad \left(= -\frac{21}{8}x^2 - \frac{81}{4}x + \frac{1187}{8}\right).$$

5. Számolja ki az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = z\sqrt{x^2 + y^2}$ függvény integrálját az *(10 p.)*

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 9,\ x^2 + y^2 \le z^2\right\}$$

halmazon.
Hengerkoordinátákban felírva

$$U = \left\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 9,\ 0 \le r \le z\right\},$$

$f(r, \varphi, z) = rz$ és a Jacobi-determináns $J = r$. Ezek alapján

$$I = \iiint_U f = \int_0^9 \int_0^z \int_0^{2\pi} r^2 z \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}z = 2\pi \int_0^9 \frac{z^3}{3} \cdot z \,\mathrm{d}z =$$
$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^9 z^4 \,\mathrm{d}z = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{9^5}{5} = \frac{39366\pi}{5}.$$

6. Definíciók és tételek. *(10 p.)*
   a. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat és $A \in \mathbb{R}$. Definíció szerint mit jelent a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ szimbólum?
   b. Legyen $V$ vektortér és $A : V \to V$ lineáris leképezés. Milyen vektorokat nevezünk $A$ sajátvektorainak?
   c. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}^2$. Milyen tulajdonságokkal kell rendelkeznie az $f$ függvény parciális deriváltjainak ahhoz, hogy abból az $f$ függvény $a$ pontbeli differenciálhatósága következzen?

a. Az $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ sorozatra $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = A$ teljesül.
Vagy másképp

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : \quad n > N \quad \to \quad \left|\sum_{k=0}^{n} a_k - A\right| < \varepsilon.$$

b. A $v \in V$ vektor az $A$ sajátvektora, ha $v \neq 0$ és létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$), melyre $Av = \lambda v$ teljesül.
c. Az $a$ pontra $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}\partial_1 f$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom}\partial_2 f$ teljesül, valamint a $\partial_1 f$ és a $\partial_2 f$ függvény folytonos az $a$ pontban.