ANALÍZIS(2) **VIZSGADOLGOZAT I. rész** **2005. június 23.**
Műszaki Informatika szak Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (14 pont)

Adja meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' + \frac{5}{x}\, y = e^{x}\, x^{-4}\,, \qquad x \neq 0$$

2. feladat (13 pont)

Írja fel az

$$f(x) = e^{x} + \frac{1}{4+x}$$

függvény $x_0 = 0$ és $x_0 = -2$ körüli Taylor sorait és azok konvergencia sugarait!

3. feladat (10 pont)

Írja fel a trigonometrikus sor általános alakját!
Mi a kapcsolat az egyenletesen konvergens trigonometrikus sor ϕ összegfüggvénye és az a_k, b_k együtthatók között?
Állítását bizonyítsa be a_3 esetére! Hol használta ki az egyenletes konvergenciát?

4. feladat (14 pont)

$$f(x,y) = \frac{e^{4x-5y}}{2y+3}$$

a) Hol differenciálható az f függvény? Adjon meg a síkon két olyan pontot, ahol f nem differenciálható!
b) Írja fel az f függvény $P(0,0)$ pontbeli gradiensét!
c) Mennyi az f függvény $P(0,0)$ pontbeli, $\underline{v} = (-1,3)$ irányú iránymenti deriváltja?

5. feladat (9 pont)

$f(x,y) = h(xy + x^2)\,, \qquad h \in C^2_{\mathbb{R}}\,; \qquad f'_x = ?\,, \quad f''_{xy} = ?$

6. feladat (13 pont)*

a) Legyen T az origó, az $A(1,2)$ és a $B(3,0)$ által határolt háromszög alakú tartomány!
Írja fel az f függvény T-re vonatkozó kétszeres integráljait!
b)

$$\iint_T y \;dx\;dy = ?\,,$$

ahol T az előző. (Az egyik módon számítsa ki!)

7. feladat (15 pont)*

a) Igazolja, hogy az alábbi függvény harmonikus:

$$u = x^2 - y^2 + e^{3x}\,\sin 3y$$

b) Legyen u egy reguláris komplex függvény valós része! Írja fel az $f'(z)$-re tanult 4 darab képletet és valamelyikkel határozza meg az $f'(z)$ és az $f'(3j)$ értékét!

8. feladat (12 pont)*

Adja meg az alábbi integrálok értékét algebrai alakban!

$$\oint_{|z-j|=4} \frac{\sin(3z)}{z-2j}\,dz = ? \qquad\qquad \oint_{|z-j|=3/4} \frac{\sin(3z)}{(z-2j)^2}\,dz = ?$$

Pótfeladat (csak az elégséges (és indokolt esetben a közepes) vizsgához javítjuk ki):

9. feladat (12 pont)

Határozza meg az alábbi sor konvergencia sugarát és konvergencia tartományát:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{n\,(\sqrt{5})^n}\,(x-2)^n$$

10. feladat (8 pont)

$$f(x,y) = (y^2+1)e^{\operatorname{sh} x}$$

Van-e lokális szélsőértéke az f függvénynek? Ha van, milyen jellegű?
$df((0,3)\,,\,(dx,dy)) = ?$

A *-gal jelölt feladatokból legalább 16 pontot el kell érni!

ANALÍZIS(2) — Műszaki Informatika szak — **VIZSGADOLGOZAT I. rész** — 2005. június 23. Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (14 pont)

Adja meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' + \frac{5}{x}\, y = e^x x^{-4}, \qquad x \neq 0$$

(H): $y' + \frac{5}{x} y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{5}{x} y \underset{y\neq 0}{\Rightarrow} \int \frac{dy}{y} = -5\int \frac{1}{x}\,dx$ (2)

$\Rightarrow \ln|y| = \underbrace{-5\ln|x|}_{\ln\frac{1}{|x|^5}} + c_1 \Rightarrow |y| = e^{c_1}\cdot\frac{1}{|x|^5}$

$\Rightarrow y = \pm e^{c_1}\frac{1}{x^5}$ ill. $y\equiv 0$ is megoldó $\Rightarrow y_H = \frac{c}{x^5}$, $c\in\mathbb{R}$ (3)

(I): $y_{ip} = \frac{c(x)}{x^5}$; $y'_{ip} = \frac{c' x^5 - c\, 5x^4}{x^{10}} = \frac{c'}{x^5} - \frac{5c}{x^6}$

$\frac{c'}{x^5} - \frac{5c}{x^6} + \frac{5}{x}\frac{c}{x^5} = \frac{e^x}{x^4} \Rightarrow c' = x e^x$ (3)

$c = \int x e^x\,dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = (x-1)e^x$ (3)

$u = x \quad v' = e^x$

$u' = 1 \quad v = e^x$

$y_{ip} = \frac{(x-1)e^x}{x^5}$ (1)

$y_{id} = y_H + y_{ip} = \frac{c}{x^5} + \frac{(x-1)e^x}{x^5}$, $c\in\mathbb{R}$

(1) (1)

2. feladat (13 pont)

Írja fel az

$$f(x) = e^x + \frac{1}{4+x}$$

függvény $x_0 = 0$ és $x_0 = -2$ körüli Taylor sorait és azok konvergencia sugarait!

$x_0 = 0$

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (1); $x\in\mathbb{R}$ (1)

$\frac{1}{4+x} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{-x}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}x^n$; $\left|-\frac{x}{4}\right| = \frac{|x|}{4} < 1$

(3) $|x|<4$ (2)

v1 050623/1

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!} + \frac{(-1)^n}{4^{n+1}}\right)x^n$; $|x|<4$, tehát $R=4$ (1)

$x_0 = -2$; $x - x_0 = x+2$

$e^x = e^{x+2-2} = e^{-2}e^{x+2} = e^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}$, $x\in\mathbb{R}$ (2)

$\frac{1}{4+x} = \frac{1}{2+(x+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{-(x+2)}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x+2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x+2)^n$

$\left|-\frac{(x+2)}{2}\right| = \frac{|x+2|}{2} < 1 \Rightarrow |x+2|<2$ (2)

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{-2}}{n!} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)(x+2)^n$

$|x+2|<2$, tehát $R=2$ (1)

3. feladat (10 pont)

Írja fel a trigonometrikus sor általános alakját!

Mi a kapcsolat az egyenletesen konvergens trigonometrikus sor ϕ összegfüggvénye és az a_k, b_k együtthatók között?

Állítását bizonyítsa be a_3 esetére! Hol használta ki az egyenletes konvergenciát?

Trigonometrikus sor: $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$

(T) $\Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$ és a konvergencia egyenletes, akkor

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(x)\cos kx\,dx = \frac{(\Phi|\cos kx)}{(\cos kx|\cos kx)}, \qquad k = 0,1,2,\dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(x)\sin kx\,dx = \frac{(\Phi|\sin kx)}{(\sin kx|\sin kx)}, \qquad k = 1,2,\dots$$

$\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + \dots + a_3\cos 3x + b_3\sin 3x + \dots = \phi(x)$ (1)

Mindkét oldalt skalárisan szorozzuk $\cos 3x$-szel, tehát beszorozzuk $\cos 3x$-szel és integráljuk $[-\pi,\pi]$-n. (3)

Az egyenletes konvergencia miatt szabad tagonként integrálni: (2)

v1 050623/2.

$$\underbrace{(1|\cos 3x)}_{=0} + a_1\underbrace{(\cos x|\cos 3x)}_{=0} + b_1\underbrace{(\sin x|\cos 3x)}_{=0} + \dots + a_3\underbrace{(\cos 3x|\cos 3x)}_{\pi} + \dots$$

$$\dots + a_k\underbrace{(\cos kx|\cos 3x)}_{=0} + b_k\underbrace{(\sin kx|\cos 3x)}_{=0} + \dots = (\phi(x)|\cos 3x)$$

Az ortogonalitás miatt a bal oldalon minden skaláris szorzat nulla, kivéve $(\cos 3x|\cos 3x)$-et. ②

$$\Rightarrow \quad a_3(\cos 3x|\cos 3x) = (\phi(x)|\cos 3x)$$

$$\Rightarrow \quad a_3 = \frac{(\phi(x)|\cos 3x)}{(\cos 3x|\cos 3x)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(x)\cos 3x\,dx \quad ②$$

4. feladat (14 pont)

$$f(x,y) = \frac{e^{4x-5y}}{2y+3}$$

a) Hol differenciálható az f függvény? Adjon meg a síkon két olyan pontot, ahol f nem differenciálható!
b) Írja fel az f függvény $P(0,0)$ pontbeli gradiensét!
c) Mennyi az f függvény $P(0,0)$ pontbeli, $\underline{v} = (-1,3)$ irányú iránymenti deriváltja?

a.) $f(x,y) = e^{4x}\dfrac{e^{-5y}}{2y+3} \qquad y \neq -\frac{3}{2}$

Tehát pl. $P_1(0,-\frac{3}{2})$, $P_2(1,-\frac{3}{2})$ pontokban f nem deriválható, mivel nincs ott értelmezve.

① $f'_x = 4e^{4x}\dfrac{e^{-5y}}{2y+3}$

② $f'_y = e^{4x}\dfrac{-5e^{-5y}(2y+3) - e^{-5y}\cdot 2}{(2y+3)^2}$

Ha $y \neq -\frac{3}{2}$, akkor f'_x, f'_y $\exists$ és folytonos ① $\Rightarrow$ $(x,-\frac{3}{2})$ pontok kivételével f differenciálható ②

b.) $\operatorname{grad} f(0,0) = f'_x(0,0)\underline{i} + f'_y(0,0)\underline{j} = \frac{4}{3}\underline{i} - \frac{17}{9}\underline{j}$ ④

c.) $\dfrac{df}{d\underline{e}}\Big|_P = \operatorname{grad} f(P)\cdot\underline{e}$ ①

$|\underline{v}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$; $\quad \underline{e} = -\frac{1}{\sqrt{10}}\underline{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\underline{j}$ ①

$\dfrac{df}{d\underline{e}}\Big|_P = \left(\frac{4}{3}\underline{i} - \frac{17}{9}\underline{j}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\underline{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\underline{j}\right) = -\frac{4}{3\sqrt{10}} - \frac{17}{9}\frac{3}{\sqrt{10}} \left(= -\frac{7}{\sqrt{10}}\right)$ ②

v1 050623/3.

5. feladat (9 pont)

$$f(x,y) = h(xy + x^2), \quad h \in C^2_{\mathbb{R}}; \quad f'_x = ?, \quad f''_{xy} = ?$$

$f'_x = h'(xy+x^2)\cdot(y+2x)$ ③

$f''_{xy} = h''(xy+x^2)\cdot x(y+2x) + h'(xy+x^2)\cdot 1$ ⑥

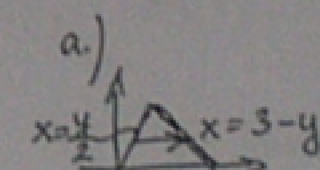
6. feladat (13 pont)*

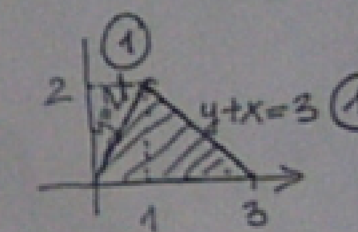
a) Legyen T az origó, az $A(1,2)$ és a $B(3,0)$ által határolt háromszög alakú tartomány. Írja fel az f függvény T-re vonatkozó kétszeres integráljait!
b)

$$\iint_T y\,dx\,dy = ?,$$

ahol T az előző. (Az egyik módon számítsa ki!)

a.)





$$\int_0^2\int_{\frac{y}{2}}^{3-y} f(x,y)\,dx\,dy \quad ①$$
① ②

$$\int_0^1\int_0^{2x} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^3\int_0^{3-x} f(x,y)\,dy\,dx \quad ①$$
① ① ①

b.) $\displaystyle\int_0^2\int_{\frac{y}{2}}^{3-y} y\,dx\,dy = \int_0^2 \underbrace{yx\Big|_{x=\frac{y}{2}}^{3-y}}_{y(3-y-\frac{y}{2}) = 3y - \frac{3}{2}y^2} dy$ ② $= \dfrac{3y^2}{2} - \dfrac{3}{2}\dfrac{y^3}{3}\Big|_0^2 =$ ② $= 6 - 4 = 2$

v1 050623/4.

7. feladat (15 pont)*

a) Igazolja, hogy az alábbi függvény harmonikus:

$$u = x^2 - y^2 + e^{3x}\sin 3y$$

b) Legyen u egy reguláris komplex függvény valós része! Írja fel az $f'(z)$-re tanult ~~1 darab~~ képletet és ~~valamelyik~~kel határozza meg az $f'(z)$ és az $f'(3j)$ értékét!

a.) $u'_x = 2x + 3e^{3x}\sin 3y$; $u''_{xx} = 2 + 9e^{3x}\sin 3y$

$u'_y = -2y + 3e^{3x}\cos 3y$; $u''_{yy} = -2 - 9e^{3x}\sin 3y$

$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} \equiv 0$, tehát u harmonikus (5)

b.) $f'(z) = u'_x + j v'_x$ (1) és $\left.\begin{matrix} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{matrix}\right\}$ (2) csak $f' = u'_x - j u'_y$ -ra is adjunk 6 pontot

$\Rightarrow f'(z) = v'_y + j v'_x = v'_y - j u'_y = u'_x - j u'_y$ (1) (1) (1)

Tehát

$f'(z) = u'_x - j u'_y = 2x + 3e^{3x}\sin 3y + j(2y - 3e^{3x}\cos 3y)$ (2)

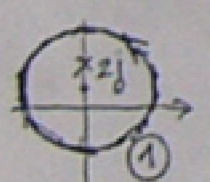
$f'(3j) = 3\sin 9 + j(6 - 3\cos 9)$ (2)

$x=0, y=3$

8. feladat (12 pont)*

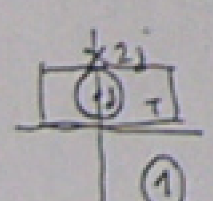
Adja meg az alábbi integrálok értékét algebrai alakban!

$$\oint_{|z-j|=4} \frac{\sin(3z)}{z-2j}\,dz = ? \qquad \oint_{|z-j|=3/4} \frac{\sin(3z)}{(z-2j)^2}\,dz = ?$$



$\oint_{|z-j|=4} \frac{\sin 3z}{z-2j}\,dz = 2\pi j \sin 3z\big|_{z=2j} = 2\pi j \underbrace{\sin 6j}_{j\,\mathrm{sh}\,6} = -2\pi\,\mathrm{sh}\,6$ reg (1) (3) (2) (1)

(Cauchy-féle integrálformulát használtuk.)



$\oint_{|z-j|=\frac{3}{4}} \underbrace{\frac{\sin 3z}{(z-2j)^2}}_{\text{reg } T\text{-n}}\,dz = 0$ a Cauchy-féle alaptétel miatt (3) (1) (1)

Pótfeladat (csak az elégséges (és indokolt esetben a közepes) vizsgához javítjuk ki):

9. feladat (12 pont)

Határozza meg az alábbi sor konvergencia sugarát és konvergencia tartományát:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{n(\sqrt{5})^n}(x-2)^n$$

$a_n = \dfrac{\frac{1}{5}5^n}{n(\sqrt{5})^n} = \dfrac{1}{5}\dfrac{(\sqrt{5})^n}{n}$; $x_0 = 2$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{\tfrac{1}{5}}}_{1} \dfrac{\sqrt{5}}{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}} = \sqrt{5} = \dfrac{1}{R}$ (1) (4) $\Rightarrow R = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ (1)

$2-\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\qquad 2+\frac{1}{\sqrt{5}}$

Végpontok:

$x = 2 - \frac{1}{\sqrt{5}}$ $= \sum^{\infty} \frac{1}{5}\frac{(\sqrt{5})^n}{n}\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)^n = \frac{1}{5}\sum^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ konv. (Leibniz sor) (

$x = 2 + \frac{1}{\sqrt{5}}$: $\frac{1}{5}\sum^{\infty}\frac{1}{n}$ div. (harm. sor) (2)

K.T.: $\left[2 - \frac{1}{\sqrt{5}}, 2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ (1).

10. feladat (8 pont)

$$f(x,y) = (y^2+1)\,e^{\mathrm{sh}\,x}$$

Van-e lokális szélsőértéke az f függvénynek?

$df((0,3),(dx,dy)) = ?$

$f'_x = (y^2+1)e^{\mathrm{sh}\,x}\,\mathrm{ch}\,x$

$f'_y = 2y\,e^{\mathrm{sh}\,x}$

} f mindenütt deriválható, mert f'_x, f'_y $\exists$ és folytonos mindenütt (

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele:

$f'_x = \underbrace{(y^2+1)}_{\geq 1}\underbrace{e^{\mathrm{sh}\,x}}_{>0}\underbrace{\mathrm{ch}\,x}_{\geq 1} = 0$ és $f'_y = 0$ (2)

Tehát $f'_x = 0$ soha nem teljesül $\Rightarrow$ nincs f-nek lok. szélsőértéke (1)

$df((0,3),(dx,dy)) = f'_x(0,3)\,dx + f'_y(0,3)\,dy = 10\,dx + 6\,dy$ (1)