06.01.12. An(1)IV.

1) Feladat (12 pont).

a) Mikor mondjuk, hogy egy sorozat alulról korlátos illetve, hogy létezik a határértéke? Mit állíthatunk egy korlátos és egy nullához tartó sorozat szorzatáról? Állítását bizonyítsa be!

b)

$$\lim_{n\to\infty} (\sin n^2) \arcsin \frac{1}{n} = ?$$

(D) (a_n) alulról korlátos, ha $\exists k_a$: $\forall n$-re: $k_a \le a_n$. (2)

(D) Azt mondjuk, hogy (a_n) konvergens és határértéke (limesze) $A \in \mathbb{R}$, jelben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A,$$

ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy

$$|a_n - A| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon).$$ (2)

($N(\varepsilon)$ neve: küszöbindex, küszöbszám)

(T) $\boxed{(a_n \to 0) \wedge (b_n \text{ korlátos}) \implies a_n b_n \to 0}$ (1)

(B) $\exists K$, hogy $|b_n| \le K$, $\forall n$

$\exists N\left(\frac{\varepsilon}{K}\right)$ hogy $|a_n - 0| = |a_n| < \frac{\varepsilon}{K}$, ha $n > N\left(\frac{\varepsilon}{K}\right) = N$

$\Downarrow$ $|a_n b_n - 0| = |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon$, ha $n > N$

tehát $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ (4)

$|\sin n^2| \le 1 \implies \sin n^2$ korlátos. (1)

$\lim_{n\to\infty} \arcsin \frac{1}{n} = \arcsin 0 = 0$ (1)

$\overset{(T)}{\implies} \lim_{n\to\infty} (\sin n^2) \arcsin \frac{1}{n} = 0$ (1)

06.01.12

2) Feladat (10 pont).

a) Határozza meg az a és b értékét úgy, hogy az alábbi függvény differenciálható legyen a nullában:

$$f(x) = \begin{cases} \cosh 2x - \sinh^2 x, & \text{ha } x < 0, \\ ax + b, & \text{ha } x \ge 0 \end{cases}$$

b)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = ?$$

a) Differenciálható $\implies$ folytonos, ezért folytonosnak is $\boxed{7}$ kell lennie. (2)

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} \cosh 2x - \sinh^2 x = \mathrm{ch}\, 0 - \mathrm{sh}^2 0 = 1$ (2)

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = b \implies b = 1.$ (1)

$f'_+(0) = a = f'_-(0) = (\mathrm{ch}\, 2x - \mathrm{sh}^2 x)'_0 = 2\mathrm{sh}\, 2x - 2\mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, x$

$= 0$ (2) $\implies a = 0$ és $b = 0$ esetén $\exists f'(0)$.

b) $\boxed{3}$ $f(x) = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = \mathrm{ch}^2 x$ (2)

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{ch}^2 x = \infty$ (1)

Vagy $\mathrm{ch}\, 2x = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$ $\mathrm{sh}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (2)

$f(x) = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right)$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (1)

06.01.12. An(1)V.

3) Feladat (16 pont).

a) Mondja ki és bizonyítsa be a L'Hospital szabály egyik alakját!

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{5x-\sin 5x} = ?$$

a) $\boxed{9}$

(T) Legyen f és g differenciálható $\dot{K}_{\alpha,\delta}$-ban és itt $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0$ és

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)=\lim_{x\to\alpha} g(x)=0$$

Ha $\lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\beta$, akkor $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=\beta$.

(Itt $\alpha = x_0,\ x_0+0,\ x_0-0,\ +\infty,\ -\infty$ lehet, $\beta = b,\ +\infty,\ -\infty$ lehet). (3)

(B) $\alpha = x_0$-ra bizonyítjuk.

$f(x_0):=0,\ g(x_0):=0$ (1)

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$ (Cauchy-féle k.é.t.) $\xi\in(x,x_0)$ (3) (ill. $\xi\in(x_0,x)$)

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$, ha ez utóbbi létezik (véges vagy ∞) (2)

b) $\boxed{7}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{5x-\sin 5x}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{5-5\cos 5x} = \text{(3)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{25\sin 5x}\ \text{(2)}\ \overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{125\cos 5x}=\frac{1}{125}\ \text{(2)}$$

4) Feladat (20 pont).

Tekintsük az alábbi paraméteresen adott görbét:

$$x=t+\ln(1+t)\,,\qquad y=t+e^{2t}\,,\qquad t>-1$$

a)

$$\frac{dx}{dt}(t=0)=?\qquad \frac{dy}{dt}(t=0)=?\qquad \frac{d^2x}{dt^2}(t=0)=?\qquad \frac{d^2y}{dt^2}(t=0)=?$$

b) Indokolja meg, hogy ez a paraméteresen adott görbe az $t=0$ paraméterű pont egy környezetében tekinthető valamely $y=f(x)$ grafikonnak!

c) Indokolja meg, hogy ennek az f függvénynek az origó egy környezetében nincs inflexiós pontja!

a) $\boxed{8}$

$\dot{x}(0)=1+\frac{1}{1+t}\Big|_0=2$ $\qquad \dot{y}(0)=1+2e^{2t}\Big|_0=3$

$\ddot{x}(0)=-\frac{1}{(1+t)^2}\Big|_0=-1$ $\qquad \ddot{y}(0)=4e^{2t}\Big|_0=4$

b) $\boxed{3}$ Pl $t\in[-\frac12,\frac12]$-ben $\dot{x}(t)>0 \Rightarrow x(t)$ szig. mon nő $\Rightarrow \exists$ inverze, azaz t kifejezhető x függvényeként. Ezt beírva az $y=y(t)$-be adódik az állítás. (3)

c) $\boxed{9}$

$$y''(0)=\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}=\frac{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x})^3}\Big|_{t=0}\ \text{(2)}$$

$$y''(0)=\frac{4\cdot 2-(-1)3}{2^3}=\frac{11}{8}>0\ \text{(2)}$$

Mivel $\dot{x}>0 \Rightarrow y''$ mint folytonos függvények hányadosa folytonos (nevező nem 0.) (1)

Ha a folytonos fv egy pontban pozitív, akkor létezik a pontnak egy egész kis környezete amelyben pozitív, így nem nulla. (2)

Nem teljesül az inflexió létezésének szükséges feltétele, tehát ebben a környezetben nincs inflexió. (2)

***5) Feladat (10 pont).**

a) Írja le a parciális integrálás határozott integrálra vonatkozó alakját!

b)

$$\int_0^1 \arctan x \, dx = ?$$

$$\int_a^b u(x) v'(x) \, dx = \Big[u(x) v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) \, dx \quad 2$$

ahol u és v folytonosan differenciálható.

$$\int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx \quad 3$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \quad 1$$

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x = \Big[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)\Big]_0^1 =$$

$$= \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 1 = \quad 2$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

1   1 $\ln 1 = 0$

06.01.12 An(1)V

***6) Feladat (10 pont).**

Vezesse be az $t = \sqrt[3]{x}$ új változót az

$$\int_8^{27} \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}} \, dx$$

integrálba majd határozza meg!

$$x = t^3 \qquad dx = 3t^2 \, dt \quad 2$$

$$\int_8^{27} \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}} \, dx = \int_{2\,(1)}^{3\,(1)} \frac{1}{1+t} \cdot 3t^2 \, dt_{(1)} = I$$

$$\begin{array}{l} t^2 : (t+1) = t - 1 + \frac{1}{t+1} \\ -(t^2+t) \\ \quad -t \\ \quad -(-t-1) \\ \hline \quad\quad 1 \end{array}$$

$$I = 3 \int_2^3 t - 1 + \frac{1}{t+1} \, dt_{(2)} =$$

$$= 3 \left[\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right]_2^3 = \quad 2$$

$$= 3\left(\frac{9}{2} - 3 + \ln 4 - \frac{4}{2} + 2 - \ln 3\right) = \quad 1$$

$$= 3\left(\frac{3}{2} + \ln 4 - \ln 3\right) =$$

$$\frac{9}{2} + \ln\left(\frac{4}{3}\right)^3$$

06.01.12 An(1) V.

***7) Feladat (10 pont).**

a) Mit nevezünk a Riemann integrál felső közelítő összegének? (Mit kell feltételezni a függvényről?)

b) Írja fel az $f(x) = e^x$ függvénynek az egyenletes felosztáshoz tartozó felső közelítő összegét, valamint annak a határértékét, ha a felosztás finomodik! ($[0,1]$ intervallum)

a) f korlátos az $[a,b]$-on. 1

D Osztópontok: x_k; $k = 0, 1, \dots, n$; $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b$

D A k-adik részintervallum: $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, hossza: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0$.

D $[a, b]$ egy felosztása: $F = \{I_k :\ k = 1, 2, \dots, n\}$ (= P-vel is jelöljük)

D Felső közelítő összeg (vagy felső összeg): (a rögzített F felosztáshoz tartozik)

$$S_F = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \qquad M_k = \sup_{x\in I_k}\{f(x)\} \ 2 \quad (\exists,\ \text{Dedekind}) \ 1$$

b) $x_k = \frac{k}{n}$. $S_F = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n}$ 2 $=$

$$= \frac{1}{n} \cdot e^{\frac{1}{n}} \frac{\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n - 1}{-1 + e^{\frac{1}{n}}} \ 2 = e^{\frac{1}{n}} \left(\frac{-1 + e^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}\right)^{-1} \cdot (e-1) \to e-1 \ 2$$

$e^{\frac{1}{n}} \downarrow 1$, $\quad \left(\frac{-1+e^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}\right) \downarrow 1$

VAGY. e^x folyt $\Rightarrow$ $\int_0^1 e^x\,dx \ \exists$ 2 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{F_n} = \int_0^1 e^x\,dx =$ 2

$$= \left[e^x\right]_0^1 = e - e^0 = e - 1 \ 2$$

***8) Feladat (12 pont).**

Írja le az improprius integrálokra vonatkozó majoráns és minoráns kritériumot, majd ennek alapján döntse el, hogy konvergensek-e az alábbi integrálok:

$$\int_1^\infty \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x + e}\,dx, \qquad \int_1^\infty \frac{x^2 + x + 1}{x^4 + x^3 + 2}\,dx$$

11.3.1. Majoráns kritérium

T3 $f \in R_{[a,\omega]}$ $\forall \omega \in (a,\infty)$-re és $|f(x)| \le g(x)$ $x \in [a,\infty)$-re.
Ha $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergens, akkor $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ is az (az ~~előző tétel miatt~~ ~~$\int_a^\infty f(x)\,dx$ is konvergens) és~~

~~$\left(\left|\int_a^\infty f(x)\,dx\right| \le\right) \int_a^\infty |f(x)|\,dx \le \int_a^\infty g(x)\,dx$~~

2

vagy: $0 \le h(x) \le g(x)$
$\int_a^\infty g(x)\,dx$ konv $\Rightarrow$ $\int_a^\infty h(x)\,dx$ is konv.

11.3.2. Minoráns kritérium 2

T4 Ha $0 \le h(x) \le f(x)$ $x \in [a,\infty)$-re és $\int_a^\infty h(x)\,dx = \infty \implies \int_a^\infty f(x)\,dx = \infty$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x + e} \ge \frac{x^2}{x^3 + x^3 + 3x^3} = \frac{1}{5}\,\frac{1}{x} > 0 \ 2, \quad \frac{1}{5}\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \text{ div } 1$$

$\overset{\text{min krit.}}{\Longrightarrow} \int_1^\infty \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x + e}\,dx$ divergens. 1

$$0 \le \frac{x^2 + x + 1}{x^4 + x^3 + 2} \le \frac{x^2 + x^2 + x^2}{x^4} = 3 \cdot \frac{1}{x^2} \ 2, \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx \text{ konv., ha } \alpha > 1 \ 1$$

$\overset{\text{maj. krit.}}{\Longrightarrow} \int_1^\infty \frac{x^2 + x + 1}{x^4 + x^3 + 2}\,dx$ konvergens. 1

Pótfeladat.
Csak a kettes és a hármas vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

9) Feladat (10 pont).
Írja fel az

$$f(x) = (2 + x^2)^x$$

függvény $x = 0$-hoz tartozó érintőegyenesének az egyenletét!
Van-e a függvénynek lokális szélsőértéke az $x = 0$-ban?

$$f(x) = e^{\ln (2+x^2)^x} = e^{x \ln (2+x^2)} \quad 1$$

$$f'(x) = e^{x \ln (2+x^2)} \left(\ln (2+x^2) + x \cdot \frac{2x}{2+x^2} \right) \quad 3$$

$$f'(0) = 1 \; (\ln 2 + 0) = \ln 2 \quad 1$$

$$f'(0) = m = \ln 2$$

$$f(0) = 2^0 = 1$$

$$y - y_0 = m (x - x_0)$$

$$y - 1 = (\ln 2) x \quad 3$$

$f'(0) = \ln 2 \neq 0 \Rightarrow$ nem teljesül a lok. szélső-érték létezésének szükséges feltétele $\Rightarrow$
Nincs lok. szélsőérték a 0-ban. 2