ANALÍZIS(2) | **II. ZÁRTHELYI** | **2005. április 21.**

Műszaki Informatika szak | β változat | Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (12 pont)

Határozza meg a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{2^{2k+1}\sqrt{k}}$$

konvergencia tartományát!

$a_k = \dfrac{1}{4^k \cdot 2\sqrt{k}}$; $x_0 = 3$

$\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{4\sqrt[k]{2}\sqrt{\sqrt[k]{k}}} = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{R} \Rightarrow R = 4$ (5)

Végpontok: $-1 \quad 3 \quad 7$

(3) $x = -1$: $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{(-4)^k}{4^k \cdot 2\sqrt{k}} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ konvergens, mert Leibniz sor.

(3) $x = 7$: $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{4^k}{4^k \cdot 2\sqrt{k}} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ divergens ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$, $\sum\limits^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ alakú)

Konvergencia tartomány: $[-1, 7)$ (1)

2. feladat (10 pont)

Írja fel az $f(x) = e^{x+5}$ függvény $x_0 = 0$ és $x_0 = -3$ körüli Taylor sorait és azok konvergencia sugarait!

$x_0 = 0$: $e^{x+5} = e^5 e^x = e^5\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) = e^5 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (3)

$R = \infty$ (1)

$x_0 = -3$: $e^{2+x+3} = e^2 e^{x+3} = e^2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n!}$ (3) (2)

$R = \infty$ (1)

3. feladat (16 pont)

Határozza meg a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k}$$

konvergencia sugarát és összegfüggvényét!

$f(x) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^{k-1}}{k}$ $\qquad a_{k-1} = \dfrac{1}{k}$ $\left(a_{k+1} = \dfrac{1}{k+2},\ a_k = \dfrac{1}{k+1}\right)$

$\lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k+1}{k+2} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{2}{k}} = 1 = \dfrac{1}{R} \Rightarrow R = 1$ (3)

$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \dots \qquad f(0) = 1$

Ha $x \neq 0$:

$f_1(x) := x \cdot f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^k}{k}$ (2)

$f_1'(x) = \dfrac{d}{dx}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^k}{k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{d}{dx}\dfrac{x^k}{k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \dfrac{1}{1-x}$ (4)

(R=1 itt is megállapítható lenne.)

$f_1(x) = \int\limits_0^x f_1'(x)\,dx = \int\limits_0^x \dfrac{1}{1-x}\,dx = -\ln(1-x)\Big|_0^x = -\ln(1-x)$ (4)

$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\ln(1-x)}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \quad (2) \\ 1, & \text{ha } x = 0 \quad (1) \end{cases}$

4. feladat (14 pont)

a) Határozza meg az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{3+5x^2}}$$

függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát és annak konvergencia sugarát!

b) $f^{(6)}(0) = ?$, $f^{(7)}(0) = ?$

(A sorfejtésből adjon választ és elemi műveletekkel adja meg az értékeket!)

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}} \dfrac{1}{\sqrt[4]{1+\frac{5}{3}x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\left(1+\frac{5}{3}x^2\right)^{-1/4}$ (2) $=$

$= \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{-1/4}{n}\left(\frac{5}{3}x^2\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\binom{-1/4}{n}\left(\frac{5}{3}\right)^n x^{2n}$ (3)

$\left|\frac{5}{3}x^2\right| = \frac{5}{3}|x|^2 < 1 \Rightarrow |x| < \sqrt{\cancel{\tfrac{5}{3}}\ \tfrac{3}{5}}$ tehát $R = \sqrt{\cancel{\tfrac{5}{3}}\ \tfrac{3}{5}}$

(3)

b.) $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \Rightarrow f^{(n)}(0) = n!\, a_n$

$f^{(6)}(0) = 6!\, a_6 = 6!\, \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \underbrace{\binom{1/4}{3}}_{\frac{\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{9}{4}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}} \left(\frac{5}{3}\right)^3$ (4)

$f^{(7)}(0) = 7!\, \underbrace{a_7}_{=0} = 0$ (2)

5. feladat (14 pont)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2(3x+2)}{x^2+y^2}, & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 2\ , & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Létezik-e a határértéke f-nek az origóban?
Totálisan differenciálható-e az f függvény az origóban?

b) Írja le az iránymenti derivált definícióját!

c) Számolja ki az f függvény y szerinti parciális deriváltját a $(0,0)$ pontban!

a.) $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$

$\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{2y^2}{y^2} = 2 \neq 0$

Tehát $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nem létezik. (6)

$\Rightarrow$ f nem folytonos az origóban $\Rightarrow$ f nem differenciálható az origóban. (2)

b.) $\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = \lim\limits_{t\to +0} \frac{f(\underline{a}+t\underline{e}) - f(\underline{a})}{t}$; $|\underline{e}| = 1$ (2)

c.) $f'_y(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} \frac{\overbrace{\frac{2k^2}{k^2} - 2}^{=0}}{k} = 0$ (4)

6. feladat (22 pont)

a) Írja le a totális differenciálhatóság definícióját és elégséges feltételét!

b) Hol differenciálható totálisan az

$$f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y^2}{x}$$

függvény?

c) Határozza meg az f függvénynek a $P_0(2,1)$ pontbeli, $\underline{v} = -2\underline{i} + 2\underline{j}$ irányú iránymenti deriváltját!

d) Írja fel a fenti f függvény $P_0(2,1)$ ponthoz tartozó érintősíkjának az egyenletét!

a.) (D)

$f: D \mapsto \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}^m$, $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m) \in \operatorname{int} D$, $\underline{h} = (h_1, \dots, h_m)$, $\underline{a} + \underline{h} \in D$
f (totálisan) deriválható $\underline{a}$-ban, ha Δf előállítható az alábbi alakban:

$$\Delta f = f(a_1 + h_1, \dots, a_m + h_m) - f(a_1, \dots, a_m) = A_1 h_1 + \dots + A_m h_m + \varepsilon_1 h_1 + \dots + \varepsilon_m h_m$$

vagy vektorosan

$$\boxed{\Delta f = f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) = \underline{A} \cdot \underline{h} + \underline{\varepsilon}(\underline{h}) \cdot \underline{h}}$$

ahol $\underline{A} = [A_1, \dots, A_m]$ független $\underline{h}$-tól és $\underline{\varepsilon}(\underline{h}) \to \underline{0}$, ha $\underline{h} \to \underline{0}$. $(\underline{A} = \operatorname{grad} f)$ (3)

Elégséges tétel totális deriválhatóságra:

(T) $f: D \mapsto \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}^m$, $\underline{a} \in \operatorname{int} D$
Ha f'_{x_i}-k léteznek és folytonosak $K_{\underline{a}}$-ban, akkor f totálisan deriválható $\underline{a}$-ban. (2)

b.) $f'_x(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{y^2}{x}\right)^2} \frac{-y^2}{x^2}$; $f'_y(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{y^2}{x}\right)^2} \frac{2y}{x}$ (5)

Ha $x \neq 0$, akkor f'_x és f'_y létezik és folytonos
$\Rightarrow$ f totálisan deriválható (3)

c.) Használható az elégséges tétel:

$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = \underbrace{\operatorname{grad} f(P_0)}_{= f'_x(P_0)\underline{i} + f'_y(P_0)\underline{j} = -\frac{1}{5}\underline{i} + \frac{4}{5}\underline{j}} \cdot \underline{e}$ (2)

$|\underline{v}| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \Rightarrow \underline{e} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = -\frac{2}{\sqrt{8}}\underline{i} + \frac{2}{\sqrt{8}}\underline{j}$ (1)

$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = \left(-\frac{1}{5}\underline{i} + \frac{4}{5}\underline{j}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{8}}\underline{i} + \frac{2}{\sqrt{8}}\underline{j}\right) = \frac{2}{5\sqrt{8}} + \frac{8}{5\sqrt{8}} = \frac{2}{\sqrt{8}}$ (2)

d.) Az érintősík egyenlete:

$$f'_x(2,1)(x-2) + f'_y(2,1)(y-1) - (z - f(2,1)) = 0 \quad (2)$$

$$f(2,1) = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{5}(x-2) + \frac{4}{5}(y-1) - \left(z - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) = 0 \quad (2)$$

7. feladat (12 pont)

a) Legyen g kétszer folytonosan differenciálható egyváltozós függvény! Írjuk a g változója helyére az $y^2 + yx^2$ kifejezést ($g(t)$, $t = y^2 + yx^2$)!
Legyen az így kapott kétváltozós függvény $u(x,y)$!

$$u'_x = ? \qquad u'_y = ?$$

$$u''_{xy} = ? \qquad u''_{yx} = ? \qquad u''_{yy} = ?$$

b) Legyen

$$g(t) = 8 + e^t + 2t + t^2$$

$$u''_{xy}(-1,1) = ?$$

$$u(x,y) = g(y^2+yx^2)$$

$$u'_x = g'(y^2+yx^2)\cdot 2xy \quad (2)$$

$$u'_y = g'(y^2+yx^2)\cdot(2y+x^2) \quad (1) \quad (1)$$

$$u''_{xy} = u''_{yx} = g''(y^2+yx^2)\cdot(2y+x^2)\,2xy + g'(y^2+yx^2)\cdot 2x \quad (2)$$

(1)

$$u''_{yy} = g''(y^2+yx^2)\cdot(2y+x^2)^2 + g'(y^2+yx^2)\cdot 2 \quad (2)$$

b.) $u''_{xy}(-1,1) = g''(2)\cdot 3\cdot(-2) + g'(2)\cdot(-2)$ (2)

$$g'(t) = e^t + 2 + 2t \qquad g'(2) = e^2 + 6$$

$$g''(t) = e^t + 2 \qquad g''(2) = e^2 + 2$$

$$u''_{xy}(-1,1) = -6\cdot(e^2+2) - 2(e^2+6) = -8e^2 - 24 \quad (2)$$

Pótfeladat (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (10 pont)

a) Írja le az x_0 bázispontú n- edrendű Taylor polinom definícióját!

b) Határozza meg az $f(x) = \operatorname{tg} 3x$ függvény $x_0 = \pi/12$ bázispontbeli T_3 harmadrendű Taylor polinomját!

a.) $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$; f legalább n-szer differenciálható

(2)

b.) $f(x) = \operatorname{tg} 3x \qquad f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ (1)

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 3x}\cdot 3 \qquad f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 3\,\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = 6 \quad (1)$$

$$f''(x) = 3(-2)\cos^{-3}3x\,(-\sin 3x)\cdot 3$$

$$f''\left(\frac{\pi}{12}\right) = +18\,\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos^3\frac{\pi}{4}} = 36 \quad (2)$$

$$f'''(x) = \left(18\cos^{-3}3x\,\sin 3x\right)' = 18\left(-3\cos^{-4}3x\,(-\sin 3x)\cdot 3\,\sin 3x + \cos^{-3}3x\,\cos 3x\cdot 3\right)$$

$$f'''\left(\frac{\pi}{12}\right) = 18\left(9\,\frac{\sin^2\frac{\pi}{4}}{\cos^4\frac{\pi}{4}} + 3\,\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}\right) = 18(18+6) = 18\cdot 24 \quad (2)$$

$$T_3(x) = 1 + 6\left(x-\frac{\pi}{12}\right) + \frac{36}{2!}\left(x-\frac{\pi}{12}\right)^2 + \frac{18\cdot 24}{3!}\left(x-\frac{\pi}{12}\right)^3 \quad (2)$$