ANALÍZIS(2) Műszaki Informatika szak | **VIZSGADOLGOZAT I. rész** | **2003. június. 5.** Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

DE **1. feladat (13 pont)**

Határozza meg az

$$y' + y\ \sin x = \sin x\ e^{2\cos x}$$

differenciálegyenlet általános megoldását!

$H:\quad y' + y \sin x = 0$

$y' = -y \sin x \qquad y \equiv 0$ m.o.

$\int \frac{dy}{y} = \int -\sin x\, dx \implies \ln|y| = \cos x + C_1$

$\implies |y| = e^{C_1} e^{\cos x}$

$\left.\begin{array}{l} y = \pm e^{C_1} e^{\cos x} \\ y \equiv 0 \end{array}\right\} y_H = C e^{\cos x} \ ; \ C \in \mathbb{R}$

$y_{ip} = C(x)\, e^{\cos x}$

$y_{ip}' = C' e^{\cos x} + C(-\sin x) e^{\cos x}$

$C' e^{\cos x} - C \sin x\, e^{\cos x} + C e^{\cos x} \sin x = \sin x\, e^{2\cos x}$

$\implies C' = \sin x\, e^{\cos x} \implies C = -\int \underbrace{-\sin x\, e^{\cos x}}_{f' e^f} dx = -e^{\cos x}$

$y_{ip} = -e^{\cos x} e^{\cos x} = -e^{2\cos x}$

$y_{iá} = y_H + y_{ip} = C e^{\cos x} - e^{2\cos x} \ ; \ C \in \mathbb{R}$

∫∑ **2. feladat (10 pont)**

Határozza meg az alábbi sorok konvergencia sugarait!

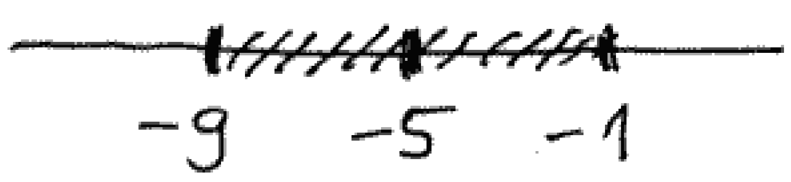
a) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k!)^2}{(2k)!} (x+5)^k$ b) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k!)^2}{(2k)!} (x+5)^{3k}$

Adjon meg egy olyan intervallumot, amelyen az a)-beli sor egyenletesen konvergens!

$x_0 = -5 \ ; \ a_k = (-1)^k \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{((k+1)!)^2 (2k)!}{(2k+2)!\,(k!)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{2(k+1)(2k+1)} = \lim_{k\to\infty} \frac{1+\frac{1}{k}}{2(2+\frac{1}{k})} =$

$= \frac{1}{4} \implies R_1 = 4$



$[\alpha, \beta] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ -en egyenletes a konvergencia.

Pl. $[-5, -4]$

b.) $u := (x+5)^3$ helyettesítéssel visszavezetjük a)-ra

$|u| < 4$: $|x+5|^3 < 4 \Rightarrow |x+5| < \sqrt[3]{4}$

$\Rightarrow R_2 = \sqrt[3]{4}$

*f*D **3. feladat (13 pont)**

$$f(x,y,z) = \frac{x}{y} + \ln(z^2 + x), \qquad P(0,1,-1)$$

a) Írja fel az f függvény P-beli gradiensét, amennyiben az létezik!

b) Adja meg a P ponton átmenő szintfelület implicit egyenletét, valamint ezen szintfelület P ponton átmenő érintősíkjának az egyenletét!

a.) $$\left.\begin{aligned} f'_x &= \frac{1}{y} + \frac{1}{z^2+x} \\ f'_y &= -\frac{x}{y^2} \\ f'_z &= \frac{2z}{z^2+x} \end{aligned}\right\}$$ K_P-ben léteznek és folytonosak $\Rightarrow \operatorname{grad} f(P) \ \exists$

$\operatorname{grad} f(P) = f'_x(P)\underline{i} + f'_y(P)\underline{j} + f'_z(P)\underline{k} = 2\underline{i} + 0\underline{j} - 2\underline{k}$

b.) Szintfelület: $f(x,y,z) = f(0,1,-1)$

$f(0,1,-1) = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} + \ln(z^2 + x) = 0$

A szintfelület érintősíkja: $\underline{n} = \operatorname{grad} f(P)$

$f'_x(P)\,(x - x_0) + f'_y(P)\,(y - y_0) + f'_z(P)\,(z - z_0) = 0$

$2\,(x-0) + 0 \cdot (y-1) - 2\,(z+1) = 0$

v1 03060512

nD **4. feladat (22 pont)**

a) Írja le a totális differenciálhatóság definícióját!

b) Határozza meg a parciális deriváltak definíciója alapján az

$$f(x,y) = |x|\,y + |y| + 1$$

függvény origóbeli parciális deriváltjait, amennyiben azok léteznek!

c) Totálisan differenciálható-e az f az origóban?

d) Legyen f totálisan deriválható az értelmezési tartomány $\underline{a}$ belső pontjában! Mit állíthatunk az $\underline{a}$ pontbeli parciális deriváltakról? Mondja ki és bizonyítsa be a tanult tételt!

a.) D

$f: D \mapsto \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m) \in \operatorname{int} D$, $\underline{h} = (h_1, \dots, h_m)$, $\underline{a} + \underline{h} \in D$

f (totálisan) deriválható $\underline{a}$-ban, ha Δf előállítható az alábbi alakban:

$$\Delta f = f(a_1 + h_1, \dots, a_m + h_m) - f(a_1, \dots, a_m) = A_1 h_1 + \cdots + A_m h_m + \varepsilon_1 h_1 + \cdots + \varepsilon_m h_m$$

vagy vektorosan

$$\boxed{\Delta f = f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) = \underline{A} \cdot \underline{h} + \underline{\varepsilon}(\underline{h}) \cdot \underline{h}}$$

ahol $\underline{A} = [A_1, \dots, A_m]$ független $\underline{h}$-tól és $\underline{\varepsilon}(\underline{h}) \to \underline{0}$, ha $\underline{h} \to \underline{0}$. $(\underline{A} = \operatorname{grad} f)$

b.) $$f'_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1-1}{h} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{|k| + 1 - 1}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{|k|}{k} \nexists$$

c.) $\nexists\, f'_y(0,0) \Rightarrow f$ nem tot. deriválható $(0,0)$-ban.

d.) T

Legyen $\underline{a}$ a D_f értelmezési tartomány belső pontja!
Ha f az $\underline{a}$-ban totálisan deriválható
$\Longrightarrow$ mindegyik változója szerinti parciális deriváltja $\exists$.

(Tehát a totális deriválhatóság szükséges feltétele a parciális deriváltak létezése.)

B Speciális $\underline{h}$-ra felírjuk a totális deriválhatóság definícióját: $\underline{h} := (0, 0, \dots, 0, h_k, 0, \dots, 0)$

$$\Delta f = f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) =$$

$$= f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + h_k, a_{k+1}, \dots, a_m) - f(a_1, \dots, a_m) = A_k \cdot h_k + \varepsilon_k(\underline{h}) \cdot h_k$$

$$\Longrightarrow \frac{f(a_1, \dots, a_k + h_k, \dots, a_m) - f(a_1, \dots, a_k, \dots, a_m)}{h_k} = A_k + \varepsilon_k(\underline{h})$$

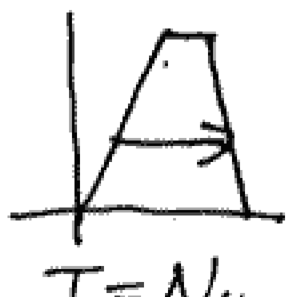
és ebből $h_k \to 0$ $(\underline{h} \to \underline{0})$ esetén $f'_{x_k}(\underline{a}) = A_k$ adódik. $\Longrightarrow \operatorname{grad} f = \underline{A} = [f'_{x_1}, \dots, f'_{x_m}]$ ■

v1 030605/3.

nʃ **5. feladat (10 pont)***

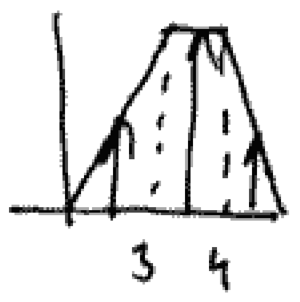
$$\iint_T e^{6x+y}\,dx\,dy\ ,$$

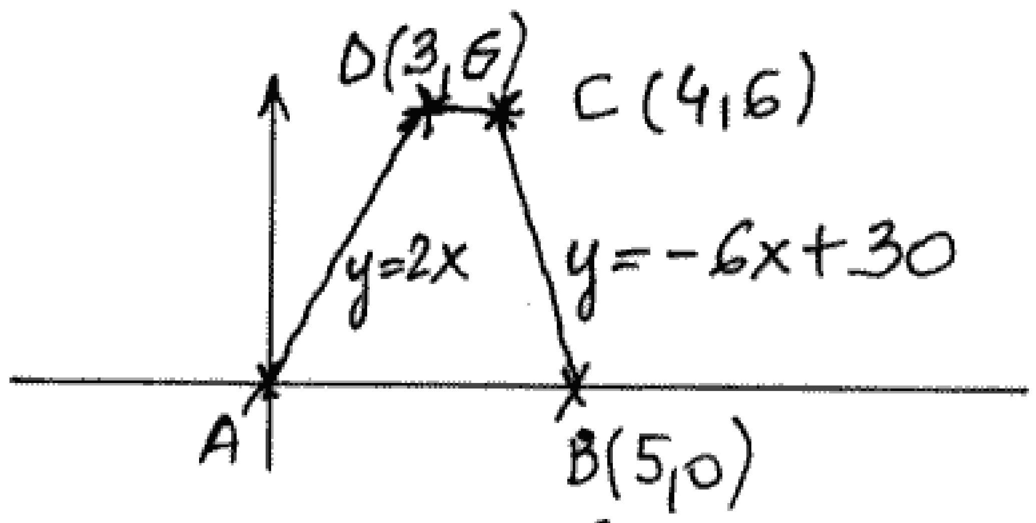
ahol T az $A(0,0)$, $B(5,0)$, $C(4,6)$ és a $D(3,6)$ pontok által meghatározott trapéz.
Alakítsa kétféleképpen kétszeres integrállá a fenti kettős integrált!
Az egyik segítségével számolja ki a kettős integrál értékét!



$T=N_y$

$$\int_{y=0}^{6}\int_{x=\frac{y}{2}}^{5-\frac{y}{6}} f(x,y)\,dx\,dy$$





$$\int_0^3\int_0^{2x} f(x,y)\,dy\,dx+\int_3^4\int_0^6 f(x,y)\,dy\,dx+\int_4^5\int_0^{-6x+30} f(x,y)\,dy\,dx$$

$$\int_0^6\int_{\frac{y}{2}}^{5-\frac{y}{6}} e^y e^{6x}\,dx\,dy=\int_0^6 e^y\,\frac{e^{6x}}{6}\Big|_{x=\frac{y}{2}}^{x=5-\frac{y}{6}}\,dy=$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^6 \underbrace{e^y\left(e^{30-y}-e^{3y}\right)}_{e^{30}-e^{4y}}\,dy=\frac{1}{6}\left(e^{30}\cdot y-\frac{e^{4y}}{4}\right)\Big|_{y=0}^{6}=$$

$$=\frac{1}{6}\left(6\cdot e^{30}-\frac{1}{4}e^{24}+\frac{1}{4}\right)$$

zD **6. feladat (20 pont)***

A

$$v(x,y)=y+\operatorname{ch}2y\ \cos\alpha x\ ,\qquad \alpha>0$$

függvény egy reguláris komplex függvény képzetes része. Határozza meg az α értékét és ezeket a reguláris függvényeket!

$f'(-j)=?$

$f=u+jv$ reguláris $\Longrightarrow$ $\Delta v\equiv 0$

$v'_x=-\alpha\ \operatorname{ch}2y\ \sin\alpha x$ $\qquad$ $v'_y=1+2\ \operatorname{sh}2y\ \cos\alpha x$

$v''_{xx}=-\alpha^2\ \operatorname{ch}2y\ \cos\alpha x$ $\qquad$ $v''_{yy}=4\ \operatorname{ch}2y\ \cos\alpha x$

$$\Delta v=(4-\alpha^2)\operatorname{ch}2y\cos\alpha x\equiv 0\ \underset{\alpha>0}{\Longrightarrow}\ \alpha=2$$

v1 030605/4.

$u_x' = v_y' \Rightarrow u_x' = 1 + 2\,\mathrm{sh}\,2y \cos 2x$ (1)

$u_y' = -v_x' \Rightarrow u_y' = 2\,\mathrm{ch}\,2y \sin 2x$ (2)

$(1) \Rightarrow u = \int (1 + 2\,\mathrm{sh}\,2y \cos 2x)\,dx = x + \mathrm{sh}\,2y \sin 2x + C(y)$

$(2):\quad 2\,\mathrm{ch}\,2y \sin 2x + C'(y) = 2\,\mathrm{ch}\,2y \sin 2x$

$\Rightarrow C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = K$

$f(z) = x + \mathrm{sh}\,2y \sin 2x + K + j\,(y + \mathrm{ch}\,2y \cos 2x)$

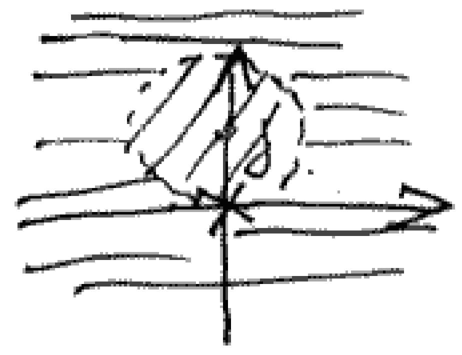
z∑ **7. feladat (12 pont)***

$$f(z) = \mathrm{sh}(z - j) + \frac{1}{z}, \qquad z_0 = j$$

a) Határozza meg az f függvény z_0 körüli, $3j$-ben konvergens Laurent sorát! Adja meg ezt a konvergencia gyűrűt!

b) Írja fel ennek a Laurent sornak a c_{-2} és c_3 együtthatóit!

a.) A körkülső kell.



$\mathrm{sh}\,(z-j) = z - j + \frac{(z-j)^3}{3!} + \frac{(z-j)^5}{5!} + \dots \quad z \in \mathbb{C}$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-j)+j} = \frac{1}{z-j} \frac{1}{1 - \frac{-j}{z-j}} = \frac{1}{z-j} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-j}{z-j}\right)^n =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-j)^n \frac{1}{(z-j)^{n+1}}$

K.T.: $|q| = \left|\frac{-j}{z-j}\right| = \frac{1}{|z-j|} < 1 \Rightarrow |z-j| > 1$

$f(z) = \dots + \frac{-j}{(z-j)^2} + \frac{1}{z-j} + (z-j) + \frac{(z-j)^3}{3!} + \dots$

K.T.: $|z-j| > 1$

b.) $c_{-2} = -j \;;\; c_3 = \frac{1}{3!}$

Pótfeladat. Csak az elégséges, esetleg a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

$f\Sigma$ **8. feladat (10 pont)**

Igaz-e, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1 \frac{x+\cos nx^3}{3^{3n-1}}\,dx\right) = \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x+\cos nx^3}{3^{3n-1}}\right)dx$$

$f_n \in C^0_{[0,1]}$

$$|f_n(x)| = \frac{|x+\cos nx^3|}{27^n\,3^{-1}} \le 3\,\frac{|x|+|\cos nx^3|}{27^n} \le \frac{2}{3}\left(\frac{1}{27}\right)^n$$

$\frac{2}{3}\sum^{\infty}\left(\frac{1}{27}\right)^n$ konv. $\Rightarrow \sum_0^{\infty} f_n(x)$ egyenletesen konvergens

$[0,1]$-en $\Rightarrow$ szabad tagonként integrálni.

Tehát igaz az állítás.

Ts **9. feladat (10 pont)**

Írja fel az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \quad \text{és a} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+5x^2}}$$

függvények $x_0 = 0$ körüli Taylor sorait és határozza meg azok konvergencia sugarait!

$g^{(6)}(0) = ?$

$$f(x) = (1+x)^{-1/3} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/3}{n}x^n \qquad R_1 = 1$$

$$g(x) = (1+5x^2)^{-1/3} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/3}{n}(5x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/3}{n}5^n x^{2n}$$

$$|5x^2| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad R_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{g^{(6)}(0)}{6!} = a_6 \Rightarrow g^{(6)}(0) = 6!\binom{-1/3}{3}5^3 = 6!\,\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 5^3$$