ANALÍZIS(1)
Műszaki Informatika szak

VIZSGADOLGOZAT I. rész

2003. május. 22.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

DE **1. feladat (10 pont)**

$$y' = \frac{y^2-9}{x^2+25}$$

Határozza meg a differenciálegyenlet általános megoldását!

$y = \pm 3$ megoldás (2)

$|y| \neq 3$: $\int \frac{1}{y^2-9}\,dy = \int \frac{1}{x^2+25}\,dx$ (2)

$$\frac{1}{y^2-9} = \frac{A}{y-3} + \frac{B}{y+3} \Rightarrow 1 = A(y+3) + B(y-3)$$

$y=3$: $1 = 6A \Rightarrow A = \frac{1}{6}$

$y=-3$: $1 = -6B \Rightarrow B = -\frac{1}{6}$

$$\frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{y-3} - \frac{1}{y+3}\right)dy = \frac{1}{25}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{5}\right)^2}\,dx$$ (2) (1)

$$\frac{1}{6}\left(\ln|y-3| - \ln|y+3|\right) = \frac{1}{25}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{5}}{\frac{1}{5}} + C$$ (1) (1) (1)

fn **2. feladat (10 pont)**

$$f_n(x) = \frac{n^2x + \cos nx}{n^2}, \qquad x \in [0, 2\pi]$$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = ?\,, \qquad \|f_n - f\| = ?$

b) Egyenletes-e a konvergencia a $[0, 2\pi]$ intervallumon?

a.) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(x + \frac{\cos nx}{n^2}\right) = x$ (3)

$\frac{\text{korl}}{\infty}$ alakú (1)

$\|f_n - f\| = \sup\limits_{x\in[0,2\pi]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,2\pi]} \frac{|\cos nx|}{n^2} = \frac{1}{n^2}$ (2) (1) (1)

b.) $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{u} f$ $[0,2\pi]$-n $\Rightarrow$

$\Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ $[0,2\pi]$-n

(2)

$f\sum$ **3. feladat (14 pont)**

a) Mit értünk azon, hogy f és g pontosan n-edrendben érintik egymást az x_0 pontban?

b) Mi a kapcsolat f és $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$ között, ha T_n és f legalább n-edrendben érintkeznek az x_0-ban? Állítását bizonyítsa be!

c) Mi a $T_n(x)$-hez tartozó Lagrange-féle hibatag, mire alkalmazzuk?

a.) Ⓓ Az f és g legalább $(n+1)$-szer differenciálható függvények *pontosan n-edrendben* érintik egymást x_0-ban, ha

$$f^{(i)}(x_0) = g^{(i)}(x_0), \quad 0 \le i \le n \quad \text{és} \quad f^{(n+1)}(x_0) \ne g^{(n+1)}(x_0).$$

2

b.) Ⓣ Legyen f legalább n-szer differenciálható x_0-ban! Egyetlen olyan legfeljebb n-edfokú $T_n(x)$ polinom van, amely x_0-ban legalább n-edrendben érinti f-et, mégpedig

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

2

Ⓓ A legalább n-szer differenciálható f függvény x_0 bázispontú n-edrendű Taylor polinomja:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Ez nem volt kérdés

Ⓑ
$$T_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_k(x-x_0)^k + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

$$T_n(x_0) = a_0 = f(x_0)$$
$$T_n'(x) = a_1 + 2\,a_2(x-x_0) + \cdots + k\,a_k(x-x_0)^{k-1} + \cdots + n\,a_n(x-x_0)^{n-1}$$
$$T_n'(x_0) = a_1 = f'(x_0)$$
$$T_n''(x) = 2\,a_2 + 3\cdot 2a_3(x-x_0) + \cdots + k(k-1)a_k(x-x_0)^{k-2} + \cdots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$$
$$T_n''(x_0) = 2\,a_2 = f''(x_0)$$
$$T_n'''(x) = 3!\,a_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3}$$
$$T_n'''(x_0) = 3!\,a_3 = f'''(x_0)$$
$$\vdots$$
$$T_n^{(k)}(x_0) = k!\,a_k = f^{(k)}(x_0)$$
$$\vdots$$
$$T_n^{(n)}(x_0) = n!\,a_n = f^{(n)}(x_0)$$

Tehát $\boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad k = 0, 1, \ldots, n\,.}$

6

v1 03052212

c.) **Lagrange-féle alakban felírt maradéktag**

Ⓣ $\boxed{\text{Ha } f \text{ legalább } (n+1)\text{-szer differenciálható } [x_0,x)\text{-ben (ill. } (x,x_0]\text{-ban), akkor } \exists\,\xi\in(x_0,x) \text{ (ill. } \xi\in(x,x_0)\text{), hogy } R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.}$ 3

Ⓜ Tehát $f(x) = T_n(x) + \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 1 $(\neg B)$

nD **4. feladat (16 pont)**

$$f(x,y) = \frac{y\ e^{x+3y}}{1+x}$$

a) Hol folytonos és hol differenciálható az f függvény?
Írja fel $\operatorname{grad} f$ értékét, ahol az létezik!

b) Írja fel a $P\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ ponthoz tartozó érintősík egyenletét!

c) $\max \left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_P = ?$

a.) $x \neq -1$ esetén f folytonos, mert folytonos függvények összetétele. 1

$(-1,y)$ pontokban f nem folytonos, mert nincs értelmezve. 1 (A határérték sem létezne, de ezt most nem kell megmutatni.)

$\Rightarrow$ $(-1,y)$ pontokban ($x=-1$ egyenes pontjai) a függvény nem deriválható. 1

$f(x,y) = y e^{3y} \dfrac{e^x}{1+x}$ $\quad \operatorname{grad} f = f'_x \underline{i} + f'_y \underline{j}$ 1

$f'_x = y e^{3y} \dfrac{e^x(1+x) - e^x}{(1+x)^2} = y e^{3y} \dfrac{x e^x}{(1+x)^2}$ 2

$f'_y = \left(e^{3y} + 3y e^{3y}\right) \dfrac{e^x}{1+x}$ 2

$x \neq -1$-re f'_x, f'_y létezik és folytonos $\Rightarrow$ f t.t. deriválható ($\exists \operatorname{grad} f$) 2

Érintősík:

$f'_x(0,\tfrac{1}{2})(x-0) + f'_y(0,\tfrac{1}{2})(y-\tfrac{1}{2}) - (z - f(0,\tfrac{1}{2})) = 0$ 1

v1 030522/3.

$f(0,\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}e^{3/2}$; $f_x'(0,\frac{1}{2}) = 0$ ① ; $f_y'(0,\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}e^{3/2}$ ①

$$\frac{5}{2}e^{\frac{3}{2}}\left(y-\frac{1}{2}\right) - \left(z - \frac{1}{2}e^{3/2}\right) = 0 \quad ①$$

c.) $\operatorname{grad} f(P) = 0\,\underline{i} + \frac{5}{2}e^{3/2}\,\underline{j}$

$$\max \left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_P = |\operatorname{grad} f(P)| = \frac{5}{2}e^{3/2} \quad ②$$

nD **5. feladat (10 pont)**

Legyen g folytonosan differenciálható kétváltozós függvény!
Írjunk a g változói helyére rendre $2r\cos\varphi$-t, illetve $6r\sin\varphi$-t ! Legyen az így kapott kétváltozós függvény $f(r,\varphi)$ és $P\left(r_0 = 1, \varphi_0 = \frac{\pi}{6}\right)$. Továbbá tudjuk, hogy

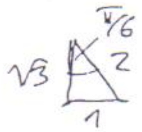
$$dg((\sqrt{3},3),(h,k)) = 13h - 7k$$

$$f_r'(P) = ? \qquad f_\varphi'(P) = ?$$

$g(x,y)$; $x = 2r\cos\varphi$; $y = 6r\sin\varphi$

$f(r,\varphi) = g(2r\cos\varphi,\ 6r\sin\varphi)$

$$⑤\left\{\begin{array}{l} dg((\sqrt{3},3),(h,k)) = g_x'(\sqrt{3},3)h + g_y'(\sqrt{3},3)k = 13h - 7k \\ \Longrightarrow g_x'(\sqrt{3},3) = 13 \; ; \; g_y'(\sqrt{3},3) = -7 \\ x_0 = x(1,\frac{\pi}{6}) = 2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \\ y_0 = y(1,\frac{\pi}{6}) = 6\sin\frac{\pi}{6} = 3 \end{array}\right.$$



$$f_r'|_P = g_x'(x_0,y_0)\cdot 2\cos\varphi|_P + g_y'(x_0,y_0)\cdot 6\sin\varphi|_P =$$
$$= 13\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 7\cdot 6\cdot\frac{1}{2} = 13\sqrt{3} - 21 \quad ③$$

$$f_\varphi'|_P = g_x'(x_0,y_0)\,(-2r\sin\varphi)|_P + g_y'(x_0,y_0)\cdot 6r\cos\varphi|_P =$$
$$= 13\left(-2\cdot\frac{1}{2}\right) - 7\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -13 - 21\cdot\sqrt{3} \quad ②$$

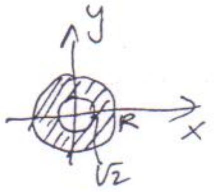
$n\int$ **6. feladat (15 pont)***

$$\iiint_V \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = ?, \qquad \text{ahol}$$

a) $V = V_1: \quad 2 \le x^2+y^2 \le R^2, \qquad 1 \le z \le e$

b) $V = V_2: \quad 2 \le x^2+y^2, \qquad 1 \le z \le e$

a.) Hengerkoordinátás tr.



$x = r\cos\varphi \qquad \sqrt{2} \le r \le R$

$y = r\sin\varphi \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$z = z \quad 2 \qquad 1 \le z \le e \quad 2$

$|J| = r$

$$I_R := \int_{\sqrt{2}}^{R}\int_0^{2\pi}\int_1^e \frac{1}{r^4}\, r\,dz\,d\varphi\,dr = \int_{\sqrt{2}}^{R}\int_0^{2\pi} r^{-3} z\Big|_{z=1}^{e} d\varphi\,dr =$$

3

$$= (e-1)\int_{\sqrt{2}}^{R} r^{-3}\varphi\Big|_{\varphi=0}^{2\pi} dr = (e-1)(2\pi-0)\,\frac{r^{-2}}{-2}\Big|_{\sqrt{2}}^{R} = \frac{2\pi}{-2}(e-1)\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{2}\right)$$

1 1 2

b.) $I = \lim\limits_{R\to\infty} I_R = \lim\limits_{R\to\infty} -\pi(e-1)\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}(e-1)$ 2

2

zD **7. feladat (10 pont)***

Keresse meg a

$$\cos z = j\,, \qquad z \in \mathbb{C}$$

egyenlet megoldásait!

$\frac{e^{jz}+e^{-jz}}{2} = j$ 2 $\qquad u := e^{jz}$

$\frac{u+\frac{1}{u}}{2} = j \Rightarrow u + \frac{1}{u} = 2j \Longrightarrow u^2 - j2u + 1 = 0$ 2

$u_{1;2} = \frac{j2 \pm \sqrt{-4-4}}{2} = \frac{j2 \pm j\sqrt{8}}{2} = j(1 \pm \sqrt{2})$ 2

$e^{jz} = j(1+\sqrt{2}) \Rightarrow jz = \mathrm{Ln}\, j(1+\sqrt{2}) = \ln(1+\sqrt{2}) + j\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$

$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - j\ln(1+\sqrt{2}) \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}$ 2

ill. $e^{jz} = j(1-\sqrt{2}) \Rightarrow jz = \mathrm{Ln}\, j(1-\sqrt{2}) = \ln(\sqrt{2}-1) + j\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$

$z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi - j\ln(\sqrt{2}-1) \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}$ 2

v1 030522/5.

2. megoldás:

$$\cos(x+jy)=j$$

$$\cos x \cos jy - \sin x \sin jy = \cos x \cdot \mathrm{ch}\, y + j(-\sin x \ \mathrm{sh}\, y) = 0 + j \cdot 1 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \cos x \ \mathrm{ch}\, y = 0 & (1) \\ -\sin x \ \mathrm{sh}\, y = 1 & (2) \end{array} \qquad (2)$$

$$(1): \ \mathrm{ch}\, y \neq 0 \ : \ \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (2)$$

$$(2): \ k = 2l \ : \ \sin x = 1 \Rightarrow \mathrm{sh}\, y = -1 \Rightarrow y = \mathrm{arsh}(-1)$$

$$z = \frac{\pi}{2} + 2l\pi + j\,\underbrace{\mathrm{arsh}(-1)}_{(2)} \left(= \frac{\pi}{2} + 2l\pi + j \ln(-1+\sqrt{2})\right); \ l \in \mathbb{Z}$$

$$\left(\mathrm{arsh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})\right)$$

$$k = 2l-1: \quad x = \frac{\pi}{2} + (2l-1)\pi = -\frac{\pi}{2} + 2l\pi, \ \sin x = -1$$

$$\Rightarrow \mathrm{sh}\, y = 1 \Rightarrow y = \mathrm{arsh}\, 1$$

$$z = -\frac{\pi}{2} + 2l\pi + j\,\underbrace{\mathrm{arsh}\, 1}_{(2)} \left(= -\frac{\pi}{2} + 2l\pi + j \ln(1+\sqrt{2})\right); \ l \in \mathbb{Z}$$

$z\int$ **8. feladat (15 pont)***

a) Írja le az Cauchy-féle általánosított integrálformulát $n=1$ és $n=2$ esetére! (Ne feledkezzen el a feltételekről!)

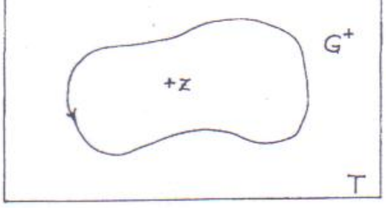
b)

$$\oint_{|z-\pi j|=1} \frac{e^{2z}}{z\,(z-\pi j)^2}\, dz = ?$$

a.) Ⓣ *Általánosított Cauchy-féle integrálformula* (1)

f reguláris az egyszeresen összefüggő T tartományon; $z \in T$, $G \subset T$ egyszerű, zárt görbe, „egyszer futja körbe" a z pontot. Ekkor f z-ben akárhányszor deriválható függvény, és

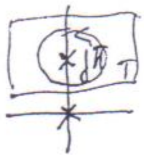
$$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi j} \oint_{G^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \qquad n = 1, 2, \ldots}$$



(1)

(3) Tehát $n=1$: $\underbrace{f'(z)}_{(1)} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{G^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta$ ill. $n=2$: $f''(z) = \frac{2!}{2\pi j} \oint_{G^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^3}\, d\zeta$

b.) $\displaystyle \oint_{|z-\pi j|=1} \frac{\overbrace{\left(\frac{e^{2z}}{z}\right)}^{f \text{ reg } T\text{-n}}}{(z-\pi j)^2}\, dz \underset{(3)}{=} \frac{2\pi j}{1!} \left(\frac{e^{2z}}{z}\right)' \Bigg|_{z=j\pi} \ (2)$ $\quad n=1$



$$= 2\pi j \ \frac{2e^{2z}\cdot z - e^{2z}}{z^2} \Bigg|_{z=j\pi} \underset{(2)}{=} 2\pi j \ \underbrace{e^{j2\pi}}_{=1} \ \frac{2j\pi - 1}{(j\pi)^2} = \frac{2}{\pi} j + 4 \quad (2)$$

v1 030522/6.

Pótfeladat. Csak az elégséges, esetleg a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

nD 9. feladat (7 pont)

Létezik-e az alábbi limesz:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{3x^2+7y^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x^2+y^2}{3x^2+7y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x^2+y^2}{3x^2+7y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{y^2}{7y^2} = \frac{1}{7} \neq \frac{1}{3} \quad 5$$

$\Rightarrow \nexists$ a határérték 2

5

Vagy $\lim\limits_{\substack{\rho_n\to 0\\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \dfrac{\rho_n^2\cos^2\varphi_n + \rho_n^2\sin^2\varphi_n}{3\rho_n^2\cos^2\varphi_n + 7\rho_n^2\sin^2\varphi_n} = \dfrac{1}{3+4\sin^2\varphi_n}$ függ φ_n-től

$\Rightarrow \nexists$ a határérték 2

Vagy $y = mx$ mentén ....

$f\sum$ 10. feladat (13 pont)

Legyen

$$f(x) = \frac{1}{1+2x}, \qquad g(x) = e^{-x}$$

Írja fel az f, g függvények $x_0 = 3$ körüli Taylor sorait, adja meg azok konvergencia tartományait!

$$\frac{a}{1-q} = a\left(1+q+q^2+\ldots\right) = a\sum_{n=0}^{\infty} q^n \qquad |q|<1$$

$$f(x) = \frac{1}{2(x-3)+7} = \frac{1}{7}\,\frac{1}{1-\frac{-2(x-3)}{7}} \;(2)\; = \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{7}\right)^n (x-3)^n \quad 3$$

$$\text{K.T.:}\quad \left|\frac{-2(x-3)}{7}\right| = \frac{2|x-3|}{7} < 1 \;(1)\; \Rightarrow |x-3| < \frac{7}{2} \quad 1$$

$$-\frac{1}{2} = 3-\frac{7}{2} \qquad 3 \qquad 3+\frac{7}{2} = \frac{13}{2}$$

$$g(x) = e^{-(x-3)-3} \;(1)\; = e^{-3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{n!} \;(3) \qquad \text{K.T.: } x\in\mathbb{R} \;(2)$$