

Bevezetés a számításelméletbe II.
Pótzárthelyi feladatok – a második zárthelyi pótlására

2001. december 5.

1. Milyen maradékot ad 2^{2001} 31-gyel osztva?
31-gyel osztva?
2. Milyen maradékot adhat egy egész szám 57-tel osztva, ha tudjuk, hogy a 30-szorosa 6 maradékot ad 57-tel osztva?
3. Mi lehet az n pozitív egész szám értéke, ha tudjuk, hogy $n^3 - 1$ és $n^2 + 5n - 6$ relatív prímek?
4. Oldjuk meg a $\varphi(n^2) = n \cdot \varphi(n)$ egyenletet (vagyis határozzuk meg az összes olyan pozitív egész számot, amire az egyenlet teljesül).
5. A H halmazt alkossák a síknak azok a pontjai, amelyeknek a második koordinátája nem nulla, vagyis $H = \{(a, b) | a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0\}$. Csoportot alkot-e a H halmaz a \star művelettel, amit a következőképp értelmezünk: $(a, b) \star (c, d) = (ad + c, bd)$.
6. Bizonyítsátok be, hogy a G csoport (amelynek a műveletét most egyszerűen egymás mellé írással jelöljük) akkor és csak akkor Abel-csoport, ha bármely két a és b elemére fennáll az $abab = aabb$ egyenlőség.
7. Legyen G egy legalább 4 csúcsú gráf. Tudjuk, hogy a gráf bármely négy $x, y, u, v \in V(G)$ csúcsára létezik a gráfban olyan út, amelynek a végpontjai x és y és amely u -t és v -t is tartalmazza. Bizonyítsuk be, hogy G 3-szorosán összefüggő!
8. Legyen a G n csúcsú, egyszerű, összefüggő gráf szomszédossági mátrixa A . Bizonyítsuk be, hogy minden $1 \leq i, j \leq n$ esetén létezik olyan $1 \leq k \leq n - 1$, hogy az A^k mátrixban az i -edik sor j -edik eleme nem nulla.