ANALÍZIS 1.	**I. ZÁRTHELYI**	**2013. október 17.**
Mérnök informatikus szak	B csoport	Munkaidő: 90 perc

1. feladat (18 pont)

a) Adja meg a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ definícióját.

b) A definíció alapján lássa be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+2}{2-4n^2} = -\dfrac{3}{4}$.

c) Konvergens-e az $a_n = \left(\dfrac{3n^2+2}{2-4n^2}\right)^n$ sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

---

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, ha $\forall\varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $|a_n - A| < \varepsilon$ ha $n \geq N(\varepsilon)$.

3 pont

b) Legyen $\varepsilon > 0$

$$\left|\frac{3n^2+2}{2-4n^2} + \frac{3}{4}\right| =_{\mathbf{2p}} \left|\frac{12n^2+8+6-12n^2}{8-16n^2}\right| \overset{n\geq 2}{\underset{\mathbf{4p}}{=}} \frac{14}{16n^2-8} < \varepsilon,$$

ha $n > N(\varepsilon) =_{\mathbf{2p}} \max\left(2, \left[\frac{1}{4}\sqrt{\frac{14}{\varepsilon}+8}\right]\right)$

c) A b) pont alapján létezik $N\left(\frac{1}{8}\right) \in \mathbb{N}$, hogy $n > N\left(\frac{1}{8}\right) \in \mathbb{N}$ esetén $\left|\dfrac{3n^2+2}{2-4n^2}\right| \leq \dfrac{7}{8}$ (**3 pont**), így $0 \leq |a_n| \leq \left(\dfrac{7}{8}\right)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (**2 pont**), (a_n) konvergens, és határértéke 0. (**2 pont**)

---

2. feladat (28 pont)

Határozza meg az alábbi határértékeket:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+1} - \sqrt{n^2+6n-3}\right)$ *b)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n + 2^n n^2}{n! - \sqrt[n]{n^{100}}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n^n + 2^n n^2)}{n! - \sqrt[n]{n^{100}}}$ *d)* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^9+3n^2+5n}{n^7+8n^3}}$

---

a) $$\sqrt{n^2-3n+1} - \sqrt{n^2+6n-3} \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{n^2-3n+1-(n^2+6n-3)}{\sqrt{n^2-3n+1}+\sqrt{n^2+6n-3}} =$$

$$= \frac{-9n+4}{\sqrt{n^2-3n+1}+\sqrt{n^2+6n-3}} \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{-9+\frac{4}{n}}{\sqrt{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{6}{n}-\frac{3}{n^2}}} \overset{\mathbf{2p}}{\to} -\frac{9}{2}$$

$$b)\quad \frac{n^n+2^n n^2}{n!-\sqrt[n]{n^{100}}} \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{n^n}{n!}\cdot\frac{1+4\frac{2^{n-2}}{n^{n-2}}}{1-\frac{\sqrt[n]{n^{100}}}{n!}} \overset{n\geq N}{>} \frac{1}{2}\cdot\frac{n^n}{n!}\to\infty,$$

a speciális rendőrelv értelmében, hiszen $n! \ll n^n$ (**2p**), és

$$\frac{1+4\frac{2^{n-2}}{n^{n-2}}}{1-\frac{\sqrt[n]{n^{100}}}{n!}} \overset{\mathbf{2p}}{\to} 1,$$

vagyis létezik olyan $N\in\mathbb{N}$, hogy $n\geq N$ esetén

$$\frac{1+4\frac{2^{n-2}}{n^{n-2}}}{1-\frac{\sqrt[n]{n^{100}}}{n!}} \overset{\mathbf{2p}}{>} \frac{1}{2}.$$

c) $\sin(n^n+2^n n^2)$ korlátos (**2p**), $\frac{1}{n!-\sqrt[n]{n^{100}}} \overset{\mathbf{2p}}{\to} 0$ vagyis

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n^n+2^n n^2)}{n!-\sqrt[n]{n^{100}}} \overset{\mathbf{2p}}{\to} 0.$$

d) A rendőrelv értelmében

$$\sqrt[n]{\frac{1}{9}}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 = \sqrt[n]{\frac{n^9}{n^7+8n^7}} \overset{\mathbf{2p}}{\leq} \sqrt[n]{\frac{n^9+3n^2+5n}{n^7+8n^3}} \overset{\mathbf{2p}}{\leq} \sqrt[n]{\frac{n^9+3n^9+5n^9}{n^7}} = \sqrt[n]{9}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2,$$

és az egyenlőtlenség mindkét oldalán álló sorozat 1-hez tart, hiszen $\sqrt[n]{n} \overset{\mathbf{1p}}{\to} 1$ és $p>0$ esetén $\sqrt[n]{p} \overset{\mathbf{2p}}{\to} 1$, vagyis a rendőrelv értelmében a sorozat 1-hez tart (**2p**).

---

3. feladat (10 pont)

Adja meg az

$$a_n = \left(\frac{2-2n^2}{3+2n^2}\right)^{n^2}$$

sorozat torlódási pontjainak halmazát, limesz inferiorját, illetve limesz szuperiorját. Konvergens-e a sorozat?

$$a_n \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{\left(\frac{1}{n^2}-1\right)^{n^2}}{\left(\frac{3}{2n^2}+1\right)^{n^2}} \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{(-1)^{n^2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{\frac{3}{2}}{n^2}\right)^{n^2}} \overset{\mathbf{2p}}{\to} \begin{cases} \frac{e^{-1}}{e^{\frac{3}{2}}} & \text{ha } n \text{ páros} \\ -\frac{e^{-1}}{e^{\frac{3}{2}}} & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

így a torlódási pontok halmaza: $\left\{-e^{-\frac{5}{2}}, e^{-\frac{5}{2}}\right\}$ (**1 p**), és

$$\liminf a_n \overset{\mathbf{1p}}{=} -e^{-\frac{5}{2}} \neq e^{-\frac{5}{2}} \overset{\mathbf{1p}}{=} \limsup a_n,$$

tehát a sorozat nem konvergens. (**1p**).

---

4. feladat (16 pont)

Legyen $a_1 = 4$, és $n = 1, 2, ...$ esetén $a_{n+1} = 9 - \dfrac{18}{a_n}$.

a) Igazolja, hogy $n = 1, 2, \dots$ esetén $3 < a_n < 6$.

b) Bizonyítsa be, hogy az (a_n) sorozat monoton.

c) Konvergens-e az (a_n) sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

---

a) Teljes indukcióval bizonyítunk: $3 < a_1 = 4 < 6$ (**2p**), és

$$\begin{aligned} 3 < a_n < 6 \quad & \overset{\mathbf{1p}}{\Longrightarrow} \frac{1}{3} > \frac{1}{a_n} > \frac{1}{6} \overset{\mathbf{1p}}{\Longrightarrow} -6 = -\frac{18}{3} < -\frac{18}{a_n} < -\frac{18}{6} = -3 \\ & \overset{\mathbf{1p}}{\Longrightarrow} 3 = 9 - 6 < 9 - \frac{18}{a_n} = a_{n+1} < 9 - 3 = 6 \end{aligned}$$

b) Teljes indukcióval bizonyítunk: $a_1 = 4 < 4,5 = a_2$ (**2p**), és

$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} \quad & \overset{\mathbf{1p}}{\Longrightarrow} \frac{1}{a_n} > \frac{1}{a_{n+1}} \overset{\mathbf{1p}}{\Longrightarrow} -\frac{18}{a_n} < -\frac{18}{a_{n+1}} \Longrightarrow \\ & \overset{\mathbf{1p}}{\Longrightarrow} a_{n+1} = 9 - \frac{18}{a_n} = 9 - \frac{18}{a_{n+1}} = a_{n+2} \end{aligned}$$

c) A sorozat monoton növő, és felülről korlátos, tehát konvergens (és a szuprámumához tart) (**2p**). Ekkor

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} 9 - \frac{18}{a_n} = 9 - \frac{18}{A}, \qquad (\mathbf{2}\text{p})$$

vagyis a határérték kielégíti a $0 = A^2 - 9A + 18 = (A-3)(A-6)$ egyenletet, így $A = 3$, vagy $A = 6$, és $a_n \leq A$, így $\lim_{n\to\infty} a_n = 6$. (**2p**)

---

5. feladat (14 pont)
Abszolút illetve feltételesen konvergens-e az alábbi sor

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+n}{n^3-1}?$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n}{n^3-4}$ a minoráns kritérium alapján divergens, hiszen $\frac{n^2+n}{n^3-4} \geq \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$, tehát a sor nem abszolút konvergens. (**5p**) Másrészt

$$0 < \frac{n^2+n}{n^3-1} = \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^3}} \to 0, \qquad (\mathbf{2p})$$

és

$$\begin{aligned}\frac{n^2+n}{n^3-1} > \frac{(n+1)^2+n+1}{(n+1)^3-1} &\overset{\mathbf{1p}}{\Longleftarrow} (n^2+n)(n^3+3n^2+3n) > (n^3-1)(n^2+3n+2)\\ &\overset{\mathbf{2p}}{\Longleftarrow} n^5+4n^4+3n^3+3n^2 > n^5+3n^4+2n^3-n^2-3n-2\\ &\overset{\mathbf{1p}}{\Longleftarrow} n^4+n^3+4n^2+3n+2>0,\end{aligned}$$

tehát a sor Leibniz, így konvergens, tehát feltételesen konvergens. (**3p**)

---

6. feladat (14 pont)
a) Ismertesse a numerikus sorokra vonatkozó majoráns-kritériumot.
b) Igazolja, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$ sor konvergens.

---

a) Ha $0 \leq a_n \leq b_n$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ is konvergens.(**3p**)
b) $\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2} \overset{\mathbf{2p}}{=} \left(\left(1-\frac{2}{n}\right)^n\right)^n \overset{\mathbf{2p}}{\leq} \left(\frac{1}{e^2}+\varepsilon\right)^n$, $\varepsilon > 0$ esetén, ha $n \geq N(\varepsilon)$, mert $\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \to \frac{1}{e^2}$ (**2p**), és $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^2}+\varepsilon\right)^n$ egy konvergens mértani sor (**2p**), ha $\frac{1}{e^2}+\varepsilon < 1$ (**1p**), tehát a majoráns-kritérium alapján a sor konvergens. (**2p**)