1, $\boxed{20}$ $\bar{z}\cdot z^3 = 4i$

1. megoldás: $z = re^{i\varphi}$ (3); $\bar{z} = re^{-i\varphi}$ (3);

$$re^{-i\varphi}\cdot r^3 e^{3i\varphi} = 4i \Rightarrow r^4 e^{2i\varphi} = 4\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}$$

(6) (egyenletek)
$$\Rightarrow \begin{cases} r^4 = 4 \Rightarrow r = \sqrt{2} \\ 2\varphi = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4};\ \varphi_2 = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

$$z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} = \underline{\underline{1+i}}\ (4);\quad z_2 = \sqrt{2}\, e^{i5\pi/4} = \underline{\underline{-1-i}}\ (4)$$

2. megoldás: $z = x+iy$ (3); $\bar{z} = x-iy$ (3)

$$(x-iy)(x+iy)^3 = (x^2+y^2)(x^2+2ixy-y^2) = 4i \Rightarrow$$

(6) (egyenletek)
$$\begin{cases} (x^2+y^2)(x^2-y^2) = 0 \\ 2xy(x^2+y^2) = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 \neq 0 \Rightarrow x^2-y^2=0, \text{ tehát } x = \pm y$$

a, $x = y$; $2\cdot x^2\cdot 2x^2 = 4$; $x = y = \pm 1$

$$\underline{\underline{z_1 = 1+i\ (4);\quad z_2 = -1-i\ (4)}}$$

b, $x = -y$ ↯

(a $2xy(x^2+y^2) = 4$ egyenlet nem elégíthető ki.)

2, A határérték körüli $\varepsilon = \frac{0.002}{2} = 10^{-3}$ sugarú intervallumot adunk meg. (4)

$$a_n = \frac{n^2+\sqrt{n}}{(2n+3)^2} = \frac{1+\overbrace{\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2}\right)}^{\to 0}}{4+\underbrace{\left(\frac{12}{n}\right)}_{\downarrow 0}+\underbrace{\left(\frac{9}{n^2}\right)}_{\downarrow 0}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4} = A \ (6). \Rightarrow \underline{\underline{I := \left[\frac{1}{4}-10^{-3};\ \frac{1}{4}+10^{-3}\right]}}$$

$$|a_n - A| = \left|\frac{n^2+\sqrt{n}}{4n^2+12n+9} - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{\cancel{4n^2}+4\sqrt{n}-(\cancel{4n^2}+12n+9)}{4(4n^2+12n+9)}\right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ha } 12n+9 \geq 4\sqrt{n} \\ (*)}}{=}$$

$$= \frac{12n+9-4\sqrt{n}}{4(2n+3)^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ha } 9-4\sqrt{n}<0\ (**)}}{<} \frac{12n}{4(2n)^2} = \frac{3}{4n} \leq 10^{-3}, \text{ ha } n \geq \frac{3000}{4} = 750$$

(10)

Tehát $\underline{N = 750}$ megfelel, akkor már a (*) és (**) feltételek is teljesülnek.

3\. [20]

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{9n^2+5n}-3n}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{9n^2+5n}+3n}{\sqrt{9n^2+5n}+3n}}_{1} = \frac{\sqrt{9n^2+5n}+3n}{\cancel{9n^2}+5n-\cancel{9n^2}} =$$ (5) (5)

$$= \frac{\sqrt{9+\frac{5}{n}}+3}{5} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{6}{5}$$ (5) (5)

4\. [20] $b_{n+1} = \sqrt{b_n^2+2b_n}-\frac{1}{2}$; $b_1 = 1$.

Lehetséges határérték: $B = \sqrt{B^2+2B}-\frac{1}{2}$

$\left(B+\frac{1}{2}\right)^2 = B^2+2B \Rightarrow B^2+B+\frac{1}{4} = B^2+2B \Rightarrow B = \frac{1}{4}$ (7)

Monotonitás: $b_1 = 1$; $b_2 = \sqrt{1+2}-\frac{1}{2} = \sqrt{3}-\frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{3} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3 > \frac{9}{4} = 2{,}25$

(8) Sejtés: b_n monoton nő. Biz.: teljes indukcióval.

α, $b_1 < b_2$; β, T.f.h. $0 < b_n < b_{n+1}$ ekkor

γ, $0 < b_n^2 < b_{n+1}^2 \Rightarrow b_n^2+2b_n < b_{n+1}^2+2b_{n+1} \Rightarrow \underbrace{\sqrt{b_n^2+2b_n}-\frac{1}{2}}_{b_{n+1}} < \underbrace{\sqrt{b_{n+1}^2+2b_{n+1}}-\frac{1}{2}}_{b_{n+2}}$

Tehát b_n szigorúan monoton nő.

(5) Ha b_n korlátos lenne, akkor, mivel monoton, lenne határértéke, azonban csak $B = \frac{1}{4} < 1 = b_1$ lehetne a valós határérték. Tehát b_n nem korlátos.

5\. i, [6]

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{7}n\right)}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{\sin\left(\frac{\pi}{7}n\right)}^{\text{korlátos}}}{n} = 0$$ (6)

$\frac{1}{n} \to 0$

ii, [14]

$$a_n = \left(\frac{5-3n}{5+3n}\right)^n = (-1)^n\frac{(3n-5)^n}{(3n+5)^n} = (-1)^n\underbrace{\frac{\left(1-\frac{5/3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{5/3}{n}\right)^n}}_{b_n},$$ (3) (3) ahol

$$b_n = \frac{\left(1-\frac{5/3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{5/3}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{e^{-5/3}}{e^{5/3}} = e^{-10/3}$$ (3)

Tehát a_n két konvergens részsorozatból van összefésülve, torlódási pontjai: $S = \{e^{-10/3}, -e^{-10/3}\}$; (3) $\liminf_{n\to\infty} a_n = -e^{-10/3}$ (2)